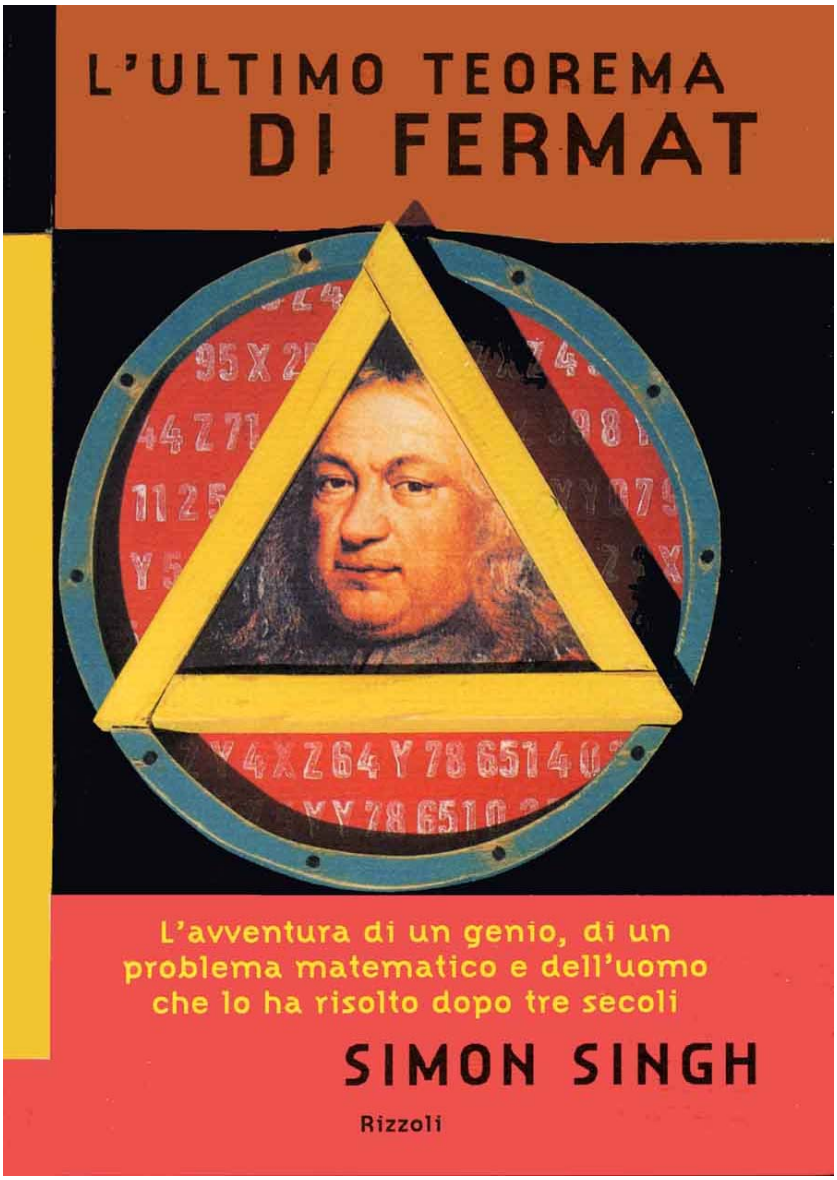
Simon Singh

L'ULTIMO TEOREMA DI FERMAT

L'avventura di un genio,
di un problema matematico e dell'uomo che lo ha risolto

Traduzione di Carlo Capararo e Brunello Lotti

Rizzoli
©1997 *by Simon Singh, foreword*
©1997 RCS Libri S.p.A. Milano
Titolo originale: *Fermat's Last Theorem*


L'ULTIMO TEOREMA
DI FERMAT
L'avventura di un genio, di un problema matematico e dell'uomo che lo ha risolto dopo tre secoli
SIMON SINGH
Rizzoli

VISIT…

Indice

PREMESSA 4

PREFAZIONE 10

1 «PENSO DI FERMARMI QUI» 12
L'Ultimo Problema 14
Tutto è numero 19
La prova assoluta 23
Un'infinità di terne 26
Dal teorema di Pitagora all'Ultimo Teorema di Fermat 28

2 IL CREATORE DI ENIGMI 31
L'evoluzione della teoria dei numeri 37
Nascita di un'enigma 44
La nota al margine 46
L'Ultimo Teorema infine pubblicato 48

3 UNA SCIAGURA MATEMATICA 52
Il Ciclope matematico 53
A piccoli passi 62
Il signor Le Blanc 67
Le buste sigillate 74

4 DENTRO L'ASTRAZIONE 79
L'epoca dei rompicapi, dei quesiti e degli enigmi 82
I fondamenti della conoscenza 88
La spinta irresistibile della curiosità 93
Il ricorso alla forza bruta 95
Il laureato 103

5 DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO 108
Soltanto un'illusione 113
Morte di un genio 115
Filosofia della bontà 116
L'anello mancante 120

6 IL CALCOLO SEGRETO 125
Recluso in soffitta 126
Duellando con l'infinito 128
La caduta della prima tessera di domino 138
«Risolto il Teorema di Fermat?» 140
Il palazzo immerso nell'oscurità 143
Il metodo di Kolyvagin e Flach 145
La conferenza del secolo 148
Le conseguenze 151

7. UN PICCOLO PROBLEMA 153
Un tappeto troppo grande 155
Un incubo per posta elettronica 161
Il regalo di compleanno 163

8. EPILOGO 167
Grande matematica unificata 167
Il premio 169

APPENDICI _____ *171*

APPENDICE 1 LA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI PITAGORA _____ **172**

APPENDICE 2 LA DIMOSTRAZIONE DI EUCLIDE CHE $\sqrt{2}$ È IRRAZIONALE _____ **174**

APPENDICE 3. L'ENIGMA DELL'ETÀ DI DIOFANTO _____ **176**

APPENDICE 4. IL PROBLEMA DEI PESI DI BACHET _____ **177**

APPENDICE 5. LA DIMOSTRAZIONE DI EUCLIDE DELL'ESISTENZA DI UN NUMERO INFINITO DI TERNE PITAGORICHE. _____ **178**

APPENDICE 6. UN ESEMPIO DI COME SI POSSA FINIRE NELL'ASSURDO _____ **179**

APPENDICE 7. GLI ASSIOMI DELL'ARITMETICA _____ **180**

APPENDICE 8. LA TEORIA DEI GIOCHI E IL DUELLO A TRE _____ **182**

APPENDICE 9. UN ESEMPIO DI DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE _____ **183**

SUGGERIMENTI PER ULTERIORI LETTURE _____ **185**

In ricordo di Pakhar Singh

PREMESSA

Finalmente ci incontrammo in una sala non affollata, ma abbastanza grande da ospitare tutti i docenti e ricercatori del Dipartimento di Matematica dell'Università di Princeton in occasione di importanti celebrazioni. Quel pomeriggio, i presenti non erano numerosi, ma pur sempre sufficienti a farmi dubitare di chi tra loro fosse Andrew Wiles. Dopo qualche istante il mio occhio si posò su un uomo dall'aspetto schivo, che ascoltava la conversazione intorno a lui e degustava una tazza di tè, partecipe del rito pomeridiano a cui si dedicano i matematici di tutto il mondo. Wiles intuì chi io fossi.

Ero al termine di una settimana straordinaria. Avevo conosciuto alcuni dei più grandi matematici viventi e avevo cominciato a capire qualcosa del loro mondo. Ma nonostante tutti i tentativi di incontrare Andrew Wiles, di parlargli e di persuaderlo a partecipare a un documentario sulla sua impresa per la Bbc, quello era il nostro primo incontro. Ecco davanti a me l'uomo che aveva recentemente annunciato di aver trovato il santo graal della matematica; l'uomo che asseriva di aver dimostrato l'Ultimo Teorema di Fermat. Mentre parlavamo, Wiles mantenne un atteggiamento distratto e distaccato e sebbene fosse cortese e cordiale, era chiaro che desiderava restare da solo. Spiegò molto semplicemente di non poter dedicarsi ad altro che al proprio lavoro, allora in una fase critica, e che forse in seguito, quando le difficoltà del momento sarebbero state superate, avrebbe gradito partecipare al documentario. Io sapevo, e lui ne era a conoscenza, che egli stava affrontando il crollo dell'ambizione della sua vita e che quello che aveva creduto fosse il santo graal si stava rivelando niente più che un semplice calice, per quanto bello e prezioso. Wiles aveva trovato un errore nella dimostrazione da lui annunciata.

La storia dell'Ultimo Teorema di Fermat è unica. Quando incontrai Andrew Wiles, avevo già capito che era veramente una delle più grandi storie scientifiche e accademiche. Avevo visto i titoli dei giornali nell'estate del 1993, quando la dimostrazione del Teorema aveva portato la matematica sulle prime pagine della stampa mondiale. All'epoca possedevo solo un vago ricordo di cosa fosse l'Ultimo Teorema, ma capii che era qualcosa di molto particolare, qualcosa che poteva diventare l'argomento di un documentario scientifico. Trascorsi le settimane successive a conversare con molti matematici: alcuni direttamente coinvolti nella vicenda e vicini a Andrew, altri che si limitavano ad assistere eccitati a quel grande

momento nella storia della matematica. Tutti mi comunicarono generosamente le loro vedute sull'argomento e con pazienza mi aiutarono a capire quel poco che mi era possibile dei concetti che vi erano implicati. Divenne subito chiaro che si trattava di un tema che forse solo cinque o sei persone al mondo potevano comprendere pienamente. Per un po' mi domandai se ero un folle a voler realizzare su di esso un documentario. Ma da quei matematici avevo anche appreso la complessa storia e il profondo significato del teorema di Fermat per la matematica e per i suoi cultori e mi resi conto che proprio quello era l'aspetto più interessante.

Appresi le antiche origini greche del problema e che l'Ultimo Teorema di Fermat era la vetta himalayana della teoria dei numeri. Venni introdotto alla bellezza estetica f della matematica e cominciai a capire perché si designa la I matematica come il linguaggio della natura. Attraverso i I coetanei di Wiles compresi che egli aveva compiuto uno ' sforzo titanico nel far convergere tutte le più recenti tecniche della teoria dei numeri verso la sua dimostrazione del teorema di Fermat. Dai suoi amici di Princeton venni a sapere del tortuoso progresso di Andrew nei suoi anni di studio condotto in isolamento. Mi costruii un'immagine straordinaria di Andrew Wiles e dell'enigma che aveva dominato la sua vita, ma sembravo destinato a non doverlo mai incontrare di persona.

Anche se le nozioni matematiche coinvolte nella dimostrazione di Wiles sono tra le più difficili al mondo, capii che la bellezza dell'Ultimo Teorema di Fermat risiede nell'estrema semplicità del problema stesso. È un enigma formulato in termini comprensibili a ogni scolaretto. Pierre de Fermat veniva nel solco della tradizione rinascimentale, che aveva prodotto la rinascita dell'antico sapere greco, ma pose una domanda alla quale i greci non avevano pensato e, così facendo, formulò il problema più difficile che sia mai esistito. Per eccitare la curiosità dei posteri, lasciò un appunto nel quale suggeriva di possedere la risposta, ma senza precisare quale fosse. Era l'inizio di una caccia durata tre secoli.

Questo lasso di tempo sottolinea la rilevanza dell'enigma. È difficile pensare a qualche problema, in qualunque disciplina scientifica, che, pur essendo enunciato in termini così semplici e chiari, abbia resistito al progresso della conoscenza per così tanto tempo. Pensate ai passi in avanti compiuti in fisica, chimica, biologia, medicina e ingegneria dal Seicento in avanti. In medicina siamo passati dalla teoria degli «umori» alla duplicazione genetica, in fisica abbiamo identificato le particelle atomiche fondamentali e abbiamo inviato l'uomo sulla luna, ma nella teoria dei numeri l'Ultimo Teorema di Fermat rimaneva inviolato.

Per qualche tempo nella mia inchiesta cercai una ragione per la quale l'Ultimo Teorema dovesse interessare qualcuno che non fosse un matematico e perché fosse importante fare un programma su di esso. La matematica ha molteplici applicazioni pratiche, ma nel caso della teoria dei numeri quelle più rilevanti che mi venivano presentate riguardavano la crittografia, la progettazione di dispositivi acustici e le comunicazioni dalle astronavi. Nessuna di queste sembrava adatta ad attirare un grosso pubblico. Assai più attraenti erano i matematici stessi e la passione che esprimevano quando parlavano del teorema di Fermat.

La matematica è una delle più pure forme del pensiero e agli occhi di un profano i matematici sembrano quasi esseri oltremondani. Ciò che mi colpì in tutte le mie

discussioni con loro fu la precisione straordinaria delle loro affermazioni. Raramente rispondevano subito a una domanda; spesso dovevo attendere che la struttura precisa della risposta si articolasse nella mente dell'interlocutore, ma poi la risposta arrivava sotto forma di un enunciato così preciso e dettagliato come mai avrei potuto desiderare. Quando chiesi la ragione di ciò a Peter Sarnak, amico di Andrew, egli mi spiegò che i matematici semplicemente odiavano fare affermazioni false. Ovviamente anche i matematici ricorrono all'ispirazione e all'intuizione, ma i loro enunciati formali devono possedere un rigore assoluto. Nel cuore della matematica sta la dimostrazione ed è il procedimento per arrivare ad essa che distingue la matematica dalle altre scienze. Queste ultime si fondano su ipotesi, verificate sperimentalmente, finché, una volta confutate, vengono sostituite da nuove ipotesi. In matematica lo scopo è la dimostrazione assoluta e una volta che un teorema è stato provato, esso è dimostrato per sempre, senza spazio per possibili alterazioni. L'Ultimo Teorema rappresentava la sfida più alta nell'ambito delle dimostrazioni matematiche e chiunque avesse trovato la risposta avrebbe ricevuto il plauso di tutti i cultori della materia.

Erano stati offerti dei premi e si erano scatenate le rivalità. L'Ultimo Teorema ha una storia dove non mancano episodi ai limiti della tragedia e dell'inganno ed è un tema che ha anche stimolato lo sviluppo della matematica. Come dichiarò Barry Mazur, docente di matematica a Harvard, il teorema di Fermat aggiunse un certo «animus» a quelle aree della matematica connesse con i primi tentativi di dimostrarlo. Per un'ironia della sorte, è avvenuto che proprio queste aree della matematica abbiano rivestito un ruolo centrale nella dimostrazione conclusiva di Wiles.

Comprendendo lentamente qualcosa di quest'ambito così poco familiare, giunsi ad apprezzare il rilievo dell'Ultimo Teorema di Fermat per lo sviluppo della matematica nonché il parallelismo che la sua storia offriva con la storia più generale della matematica. Fermat fu il padre della moderna teoria dei numeri e dalla sua epoca la matematica si è evoluta, è progredita e si è diversificata in molte aree sempre più misteriose per il profano, nelle quali nuove tecniche hanno dato origine a ulteriori settori di ricerca, divenuti fini a se stessi. Col passare dei secoli, l'Ultimo Teorema parve essere sempre meno rilevante per i settori d'avanguardia della ricerca matematica, trasformandosi sempre più in una curiosità. Ma è ora evidente che la sua centralità per la matematica non è mai diminuita.

I problemi intorno ai numeri, come quello sollevato da Fermat, assomigliano ai puzzle e ai matematici piace risolvere i puzzle. Per Andrew Wiles si trattava di un puzzle molto speciale, nientemeno che della massima aspirazione della sua vita. Trent'anni prima, quand'era ragazzo, era stato affascinato dall'Ultimo Teorema di Fermat quando per caso ne era venuto a conoscenza in una biblioteca cittadina. Risolvere quel problema era stato il suo sogno di bambino e di adulto e quando egli rivelò una dimostrazione nell'estate del 1993, quella dimostrazione era il frutto di sette anni di lavoro dedicato all'argomento, con un grado di concentrazione e di determinazione difficile da immaginare. Molte tecniche da lui usate non erano ancora state create quando Wiles aveva cominciato a riflettere sul problema. Egli si avvalse anche dell'opera di molti eccellenti matematici, collegando idee e creando concetti che altri avevano avuto timore di elaborare. In un certo senso, osservò Barry Mazur,

risultò che tutti avevano lavorato sul teorema di Fermat, ma ciascuno per conto proprio e senza l'intenzione di farlo, dato che la dimostrazione di Wiles aveva richiesto tutto il potere risolutivo della matematica moderna. Ciò che Andrew aveva fatto era di connettere aree della matematica che sembravano separate. Grazie alla sua opera la diversificazione che la matematica aveva subito sin da quando il problema era stato formulato parve trovare una giustificazione.

Al centro della sua prova Andrew aveva dimostrato un'idea nota come la congettura di Taniyama-Shimura, che creò un nuovo ponte fra mondi matematici molto diversi. Per molti lo scopo supremo da raggiungere è una matematica unificata e quella congettura era un passo in tal senso. Nel dimostrare il teorema di Fermat, Andrew Wiles aveva collegato alcuni tra i più importanti sviluppi nella teoria dei numeri nel secondo dopoguerra e aveva assicurato la base di una piramide di congetture che erano state avanzate in quell'ambito. Egli non aveva soltanto risolto l'enigma matematico più antico, ma aveva allargato i confini stessi della disciplina. È come se il semplice problema di Fermat, nato quando la matematica muoveva i suoi primi passi, fosse rimasto in attesa proprio di quel momento.

La storia del teorema di Fermat si era conclusa nella maniera più spettacolare. Per Andrew Wiles, significava la fine di un isolamento professionale piuttosto insolito nella matematica, che in genere è un'attività di collaborazione. Il rituale del tè pomeridiano negli istituti di matematica di tutto il mondo è un momento in cui si scambiano le idee con i colleghi e rendere partecipi gli altri delle proprie concezioni prima di pubblicarle rientra nella norma. Ken Eibet, un matematico che aveva svolto lui stesso un ruolo centrale nella dimostrazione, mi disse scherzando, ma non troppo, che è l'insicurezza dei matematici a spingerli a cercare il conforto dei colleghi. Andrew Wiles si era astenuto da tutto ciò e aveva tenuto per sé i risultati del proprio lavoro tranne che nelle fasi finali. Anche questo singolare atteggiamento dà la misura dell'importanza del teorema di Fermat. Wiles era guidato dall'appassionata ambizione di essere il solo a risolvere il problema, un'ambizione abbastanza forte da dedicarle sette anni di vita e da spingerlo a tenere nascosto il suo obiettivo. Wiles sapeva che, per quanto il problema fosse apparso irrilevante ad alcuni, la competizione per risolverlo non si era mai spenta e perciò egli non poteva azzardarsi a rivelare l'oggetto del suo lavoro segreto.

Dopo settimane di indagini sul tema, ero arrivato a Princeton. I matematici parlavano del problema con intensa emozione. Trovai una storia di competizione, di successo, di isolamento, di genialità, di trionfo, di gelosia, di sforzi intensi, di sconfitte e perfino di tragedie. Dietro l'importante congettura di Taniyama-Shimura si intravedeva la tragica esistenza postbellica nel Giappone di Yutaka Taniyama, la cui vicenda ebbi il privilegio di conoscere dalla voce del suo intimo amico Goro Shimura. Sempre da Shimura appresi anche la nozione di «bontà» in matematica, dove le cose sembrano semplicemente giuste, perché sono buone. In certo qual modo il senso della bontà pervadeva quell'estate l'atmosfera della matematica. Tutti si compiacevano di quel momento di gloria.

Con tutte queste implicazioni, non c'è da stupirsi del peso della responsabilità che Andrew avvertì quando nel corso dell'autunno del 1993 lentamente l'errore era venuto alla luce. Con gli occhi del mondo puntati su di lui e con i colleghi che lo

invitavano a rendere pubblica la dimostrazione, Andrew, lui solo sa come, non cedette. Dallo studiare il problema privatamente seguendo il proprio ritmo Wiles era passato all'improvviso sotto la luce dei riflettori. Andrew è un uomo molto geloso della propria vita privata e ha lottato duramente per proteggere la sua famiglia dalla tempesta che si addensava su di lui. Nella settimana in cui mi trovavo a Princeton, telefonai, lasciai biglietti nel suo ufficio, sulla porta di casa e ai suoi amici; provai persino a fargli recapitare del del tè inglese. Ma egli resistette alle mie profferte, fino a quell'incontro casuale il giorno della mia partenza. All'incontro seguì una conversazione pacata e intensa, che durò non più di quindici minuti.

Quel pomeriggio, quando ci separammo, raggiungemmo un'intesa. Se lui fosse riuscito a emendare la dimostrazione, allora mi avrebbe cercato per discutere del documentario; io ero disposto ad attendere. Ma quando quella sera presi il volo per tornare a Londra, ebbi l'impressione che il programma televisivo fosse morto. Nessuno nel corso di tre secoli aveva mai riaggiustato i difetti delle molte dimostrazioni tentate sul teorema di Fermat. La storia era piena di false pretese di soluzione e per quanto desiderassi che Andrew Wiles fosse un'eccezione, era difficile pensare che lui fosse qualcosa d'altro da una delle tante lapidi di quel cimitero matematico.

Un anno dopo ricevetti la telefonata. Grazie a uno straordinario sviluppo matematico e un lampo di autentica intuizione, Andrew aveva finalmente messo la parola fine al teorema di Fermat nella sua vita professionale. Una anno dopo, Wiles trovò il tempo da dedicare al filmato. Avevo invitato Simon Singh a collaborare con me nella realizzazione del documentario e insieme passammo del tempo con Andrew, apprendendo dalla sua viva voce la storia completa di quei sette anni di studio isolato e dell'anno infernale che seguì. Mentre filmavamo, Andrew ci raccontò, come non aveva mai raccontato a nessuno in precedenza, delle sue intime emozioni per quello che aveva fatto; di come per trent'anni era rimasto legato al suo sogno infantile; di come tanta parte della matematica che aveva studiato fosse stata, senza che all'epoca egli neppure se ne rendesse conto, una vera e propria collezione di strumenti per affrontare la sfida di Fermat che aveva dominato la sua carriera; di come niente sarebbe più stato lo stesso; del suo sentimento di perdita per un problema che non lo avrebbe mai più costantemente accompagnato nella vita di ogni giorno; e del sollievo molto forte che ora provava. Trattandosi di una materia tecnicamente difficile da capire per i profani, durante la nostra conversazione provai una tensione emotiva mai avvertita in tutta la mia carriera di regista di documentari scientifici. Per Andrew era la fine di un capitolo della sua vita e io avevo il privilegio di assistervi da vicino.

Il documentario fu trasmesso dalla Bbc con il titolo Horizon: Fermat's Last Theorem. Ora Simon Singh ha sviluppato in questo libro le idee scaturite da quell'intima conversazione con Andrew Wiles e le ha arricchite con la storia del teorema di Fermat e con la storia di quegli aspetti della matematica che vi sono collegati. Il libro di Simon Singh è un documento completo e illuminante di una delle maggiori vicende del pensiero umano.

John Lynch

Direttore della serie *Horizon* della Bbc
marzo 1997

PREFAZIONE

La storia dell'Ultimo Teorema di Fermat è inestricabilmente connessa alla storia della matematica e tocca tutti i temi più rilevanti della teoria dei numeri. Ci consente di capire in maniera privilegiata che cosa muove la matematica e, fatto forse ancor più importante, che cosa ispira i matematici. L'Ultimo Teorema è al centro di una vicenda complicata che assume i contorni di una saga, fatta di coraggio, mancanza di scrupoli, astuzia e tragedia, che ha coinvolto tutti i maggiori eroi della matematica.

L'Ultimo Teorema di Fermat affonda le sue origini nella matematica dell'antica Grecia, duemila anni prima che Pierre de Fermat costruisse il problema nella forma oggi a noi nota. Esso connette i fondamenti della matematica creati da Pitagora alle idee più sofisticate della matematica moderna. Nello scrivere questo libro ho scelto di presentare la materia secondo il suo sviluppo cronologico, iniziando con la descrizione dell'ethos rivoluzionario del Sodalizio pitagorico e terminando con il racconto della vicenda personale di Andrew Wiles e della sua lotta per trovare una soluzione al rompicapo di Fermat.

Il capitolo 1 narra la storia di Pitagora e descrive come il teorema di Pitagora sia il diretto progenitore dell'Ultimo Teorema di Fermat. In esso si discutono anche alcuni concetti fondamentali della matematica, che ritorneranno nel corso del libro. Nel capitolo 2 si segue la vicenda dall'antica Grecia fino alla Francia del diciassettesimo secolo, quando Pierre de Fermat escogitò il più profondo enigma della storia della matematica. Per illustrare la personalità straordinaria di Fermat e il suo contributo alla matematica, che va ben oltre l'Ultimo Teorema, ho dedicato diverse pagine alla descrizione della sua vita, della sua epoca e di altre sue brillanti scoperte.

Nei capitoli 3 e 4 si descrivono alcuni tentativi di dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat durante il diciottesimo, il diciannovesimo e i primi decenni del ventesimo secolo. Anche se questi sforzi fallirono, diedero origine a un arsenale stupefacente di tecniche e di strumenti matematici, alcuni dei quali sono stati parte integrante degli ultimissimi tentativi di dimostrazione. Non mi sono limitato alle sole teorie, ma ho dedicato gran parte di questi capitoli alle personalità dei matematici che furono ossessionati dal lascito di Fermat. Le loro vicende mostrano come essi fossero disposti a sacrificare tutto per la gloria e in che modo la matematica si sia sviluppata nel corso dei secoli.

I rimanenti capitoli tracciano la cronaca degli eventi significativi degli ultimi quarantanni, che hanno rivoluzionato lo studio dell'Ultimo Teorema di Fermat. In particolare i capitoli 6 e 7 si concentrano sul lavoro di Andrew Wiles le cui scoperte nell'ultimo decennio hanno stupefatto la comunità matematica. Questi ultimi capitoli si basano su lunghi colloqui con Andrew Wiles. È stata per me un'occasione unica di apprendere direttamente alla fonte il racconto di uno dei più straordinari viaggi intellettuali del ventesimo secolo e spero di essere stato capace di comunicare la

creatività e l'eroismo che furono necessari ad Andrew Wiles durante la sua decennale tormentosa ricerca.

Nel raccontare la storia dell'enigma frustrante di Pierre de Fermat ho cercato di descrivere i concetti matematici senza ricorrere alle equazioni, ma inevitabilmente x,y e z di tanto in tanto fanno capolino. Quando compaiono equazioni mi sono sforzato di offrire spiegazioni sufficienti, in modo che perfino i lettori che non hanno nozioni matematiche potranno intenderne il significato. Per quei lettori che hanno una conoscenza della materia leggermente più approfondita, ho predisposto una serie di appendici che ampliano le idee matematiche esposte nel testo. Inoltre ho incluso un elenco di ulteriori letture, che ha in generale lo scopo di indicare al profano approfondimenti in particolari campi della matematica, ma che offre altresì riferimenti più tecnici a quei lettori che hanno un'istruzione matematica.

Il libro non sarebbe stato possibile senza l'aiuto e il coinvolgimento di molte persone. In particolare vorrei ringraziare Andrew Wiles, che si è sacrificato nel concedermi lunghe e dettagliate interviste in periodi di intensa attività. Durante i miei sette anni di attività come giornalista scientifico non ho mai incontrato nessuno che dimostrasse una passione e un impegno più alti nei confronti della propria materia e sarò sempre grato al professor Wiles per essere stato disposto a condividere con me la sua vicenda.

Voglio anche ringraziare tutti i matematici che mi hanno aiutato a scrivere il libro e che mi hanno concesso lunghe interviste. Alcuni di loro si impegnarono a fondo nell'affrontare l'Ultimo Teorema di Fermat, mentre altri furono spettatori degli storici eventi degli ultimi trent'anni. Le ore che ho trascorso conversando con loro e interrogandoli, sono state piacevolissime e apprezzo la pazienza e l'entusiasmo che hanno dimostrato nello spiegarmi tanti bellissimi concetti matematici. In particolare vorrei ringraziare John Conway, Nick Katz, Barry Mazur, Ken Ribet, Peter Sarnak, Goro Shimura e Richard Taylor.

Molte biblioteche e archivi hanno fatto tutto il possibile per aiutarmi: in particolare vorrei ringraziare Susan Oakes della London Mathematica! Society, Sandra Cumming della Royal Society e Ian Stewart dell'Università di Warwick. Sono anche grato a Jacquelyn Savani dell'Università di Princeton, a Duncan McAngus, Jeremy Gray, Paul Balister e all'Isaac Newton Institute per l'aiuto offertomi nel reperimento di materiale utile alla ricerca. Grazie anche a Patrick Walsh, Christopher Potter, Bernadette Alves, Sanjida O'Connell e ai miei genitori per i loro commenti e il loro aiuto durante l'ultimo anno.

Infine molte interviste citate in questo libro sono state ottenute mentre lavoravo al documentario televisivo sull'Ultimo Teorema di Fermat. Vorrei ringraziare la Bbc che mi ha permesso di utilizzare questo materiale, e ho un particolare debito di gratitudine verso John Lynch, che ha lavorato con me al documentario e che contribuì a far nascere il mio interesse per l'argomento.

1
«PENSO DI FERMARMI QUI»

> Archimede sarà ricordato quando Eschilo sarà dimenticato, perché le lingue muoiono ma le idee matematiche no. «Immortalità» è forse una parola ingenua ma, qualunque cosa significhi, un matematico ha le migliori probabilità di conseguirla.
>
> G.H. Hardy

Cambridge, 23 giugno 1993

Era la più importante conferenza matematica del secolo. Duecento matematici assistevano ammirati. Solo un quarto di loro capiva perfettamente la mescolanza di lettere greche e di simboli algebrici che si affollavano sulla lavagna. Gli altri erano lì solo per assistere a quella che speravano fosse un'occasione davvero storica.

Le voci si erano diffuse il giorno precedente. La posta elettronica via Internet aveva fatto trapelare che la conferenza sarebbe culminata in una soluzione dell'Ultimo Teorema di Fermat, il più famoso problema matematico esistente al mondo. Voci del genere non erano insolite. Si parlava spesso di quel problema all'ora del tè e i matematici si lanciavano in congetture su chi avrebbe potuto tentare di risolverlo. Qualche volta, nelle conversazioni nella sala dei professori, le congetture si trasformavano in voci di una soluzione, ma niente di tutto questo si era mai verificato. Stavolta le voci erano diverse. Le tre lavagne erano piene di calcoli e il conferenziere si fermò. Vennero cancellati i segni sulla prima lavagna e il calcolo continuò. Ogni linea sembrava un piccolo passo verso la soluzione, ma dopo quarantacinque minuti il conferenziere non aveva ancora esibito la prova. I professori assiepati nelle prime file attendevano ansiosamente la conclusione. Gli studenti che si trovavano in fondo alla sala guardavano i colleghi più anziani per avere qualche indizio sulla possibile conclusione. Stavano assistendo a una completa dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat oppure il conferenziere stava sviluppando un ragionamento incompleto che alla fine si sarebbe rivelato deludente?

Il conferenziere era Andrew Wiles, un inglese dai modi riservati emigrato in America negli anni Ottanta per ricoprire una cattedra a Princeton, dove si era guadagnato la fama di essere uno dei matematici più geniali della sua generazione.

Però negli ultimi anni era quasi scomparso dal consueto giro di congressi e seminari e i colleghi avevano cominciato a sospettare che fosse ormai finito. Non è insolito che giovani talenti si brucino, come ha osservato il matematico Alfred Adler: «La vita di un matematico è corta per quanto riguarda la sua creatività. Raramente si ottengono miglioramenti dopo i venticinque o i trent'anni. Se a quell'età si è combinato poco, il futuro non riserverà nulla di meglio».

«I giovani dovrebbero dimostrare i teoremi, i vecchi dovrebbero scrivere i libri», osservò G.H. Hardy in *Apologia di un matematico*. «Nessun matematico può permettersi di dimenticare che la matematica, più di qualsiasi altra arte o di qualsiasi altra scienza, è un'attività per giovani. Per fare un esempio semplice, a un livello relativamente modesto, l'età media dì ingresso dei matematici nella Royal Society è la più bassa.» Il suo allievo più intelligente, Srinivasa Ramanujan, fu eletto membro della Royal Society all'età di trentun anni appena, avendo fatto una serie di brillanti scoperte in età giovanile. Nonostante avesse ricevuto un'istruzione scolastica assai scadente nel suo villaggio di Kumbakonam nell'India meridionale, Ramanujan era in grado di creare teoremi e soluzioni sfuggiti ai matematici occidentali. In matematica l'esperienza che si acquisisce con l'età sembra meno importante dell'intuizione audace della giovinezza.

Molti matematici hanno avuto carriere altrettanto brillanti, ma brevi. Il norvegese Niels Henrik Abel, vissuto nel diciannovesimo secolo, diede i suoi più grandi contributi alla matematica all'età di diciannove anni e morì povero, solo otto anni più tardi, di tubercolosi. Charles Hermite disse di lui: «Ha lasciato ai matematici di che tenerli occupati per i prossimi cinquecento anni», ed è sicuramente vero che le scoperte di Abel hanno ancora un profondo influsso sugli odierni teorici dei numeri. Evariste Galois, contemporaneo di Abel e altrettanto geniale, fece le sue scoperte quand'era ancora adolescente.

Una volta Hardy disse: «Non conosco un solo esempio di un grande progresso matematico intrapreso da un uomo che abbia superato i cinquant'anni». I matematici di mezza età spesso scompaiono sullo sfondo e trascorrono gli anni che restano loro insegnando o amministrando piuttosto che facendo ricerca. Nel caso di Andrew Wiles niente era più lontano dal vero. Anche se aveva raggiunto i quarantanni aveva trascorso gli ultimi sette anni della vita lavorando in completa segretezza, cercando di risolvere il più grande problema della storia della matematica. Mentre gli altri sospettavano che si fosse inaridito, Wiles stava facendo progressi sensazionali, inventando nuove tecniche e strumenti che ora era pronto a rivelare. La sua decisione di lavorare in completo isolamento era una strategia ad alto rischio, inaudita nel mondo matematico.

Non avendo invenzioni da brevettare i matematici di ogni università sono tra le persone meno gelose dei loro lavori. La comunità dei matematici è orgogliosa di avere uno scambio di idee libero e aperto e le pause per il tè si sono trasformate in un rito giornaliero durante il quale tra un biscotto e un sorso di Earl Grey si comunicano e si indagano i concetti. Di conseguenza è sempre più comune trovare pubblicazioni di cui sono autori diversi matematici, che pertanto si dividono equamente la gloria. Se però il professor Wiles aveva davvero scoperto una dimostrazione completa e accurata dell'Ultimo Teorema di Fermai, allora il riconoscimento più ambito nel

campo della matematica sarebbe stato suo e soltanto suo. Il prezzo che doveva pagare per la sua segretezza era che non aveva preventivamente discusso o verificato alcuna idea con la comunità matematica e perciò esisteva la probabilità che avesse commesso qualche errore fondamentale.

Wiles avrebbe desiderato avere ancora più tempo per il suo lavoro, allo scopo di controllare perfettamente il manoscritto definitivo. Ma si era presentata l'occasione unica di annunciare la scoperta all'Isaac Newton Institute di Cambridge e perciò aveva abbandonato le sue cautele. Il solo scopo dell'esistenza di quell'istituto è di riunire le più grandi intelligenze del mondo per poche settimane allo scopo di discutere e tenere seminari su argomenti avanzati di ricerca a loro scelta. Situato alla periferia della città universitaria, lontano dagli studenti e da altre distrazioni, l'edificio è progettato in maniera particolare per favorire la collaborazione e lo scambio di idee degli accademici. Non ci sono corridoi chiusi dove ci si possa occultare e ogni ufficio si apre sulla sala centrale. I matematici vengono invitati a passare il proprio tempo in quest'area comune e scoraggiati dal tenere chiuse le porte dei propri uffici. Viene favorita la collaborazione anche quando ci si sposta nell'istituto: l'ascensore, che emette in comunicazione i tre piani, contiene una lavagna. In ogni stanza nell'edificio c'è almeno una lavagna, bagni compresi. In quell'occasione i seminari del Newton Institute avevano per titolo «*L-funzioni e aritmetica*». Tutti i maggiori teorici dei numeri del mondo erano stati riuniti per discutere problemi relativi a quest'area altamente specializzata della matematica pura, ma solo Wiles capì che le *L*-funzioni potevano racchiudere la chiave di soluzione dell'Ultimo Teorema di Fermat.

Anche se lo aveva attirato l'idea di disporre di una platea tanto qualificata per rivelare i risultati del suo lavoro, la ragione principale che lo spinse ad annunciare la sua scoperta al Newton Institute era che si trovava nella sua città, Cambridge. Lì Wiles era nato, lì era cresciuto e aveva maturato la sua passione per i numeri e a Cambridge si era imbattuto nel problema che doveva dominare il resto della sua vita.

L'Ultimo Problema

Nel 1963, quando aveva dieci anni, Andrew Wiles era già affascinato dalla matematica. «A scuola mi piaceva fare i problemi. Li portavo a casa e me ne inventavo di nuovi per conto mio. Ma il miglior problema che abbia mai trovato, l'ho scoperto nella biblioteca del mio quartiere.»

Un giorno, mentre tornava a casa da scuola, il giovane Wiles decise di visitare la biblioteca di quartiere in Milton Road. Era piuttosto povera a paragone delle biblioteche dei college universitari, tuttavia aveva una collana assai nutrita di libri di enigmi che spesso catturavano l'attenzione di Andrew. In questi libri si trovavano ogni sorta di quesiti scientifici e di enigmi matematici e di ognuno di essi veniva data opportunamente la soluzione nelle pagine conclusive. Ma quella volta Andrew si imbatté in un libro che conteneva un solo problema, senza soluzione.

Il libro era *The Last Problem* di Eric Temple Bell, la storia di un problema matematico che affondava le sue radici nell'antica Grecia, ma che aveva raggiunto la

piena maturità solo nel diciassettesimo secolo. Allora il grande matematico francese Pierre de Fermat lo aveva sollevato senza volerlo al rango di una sfida per il resto del mondo. Un grande matematico dopo l'altro era stato umiliato dal lascito di Fermat e per trecento anni nessuno era stato capace di risolverlo. In matematica ci sono altre questioni irrisolte, ma ciò che rende così speciale il problema di Fermat è la sua ingannevole semplicità. Trent'anni dopo aver letto il resoconto che ne dava Bell, Wiles mi disse che sensazione provò quando conobbe l'Ultimo Teorema di Fermat: «Sembrava così semplice e però tutti i grandi matematici della storia non avevano saputo risolverlo. Era un problema che io, bambino di dieci anni, potevo capire e capii da quel momento che non l'avrei mai dimenticato. Dovevo risolverlo».

II problema sembra così lineare perché si basa su una nozione matematica che tutti possono ricordare - il teorema di Pitagora:

> In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.

Il teorema, formulato in questa semplice enunciazione da Pitagora, è stato impresso nel cervello di milioni se non di miliardi di esseri umani. È il teorema fondamentale che ogni ingenuo scolaretto è costretto a imparare. Ma nonostante che possa essere capito da un bambino di dieci anni, il teorema di Pitagora fornì l'ispirazione per un problema che ha frustrato le più grandi menti matematiche della storia.

Nel sesto secolo a.C. Pitagora di Samo fu una delle figure più autorevoli e misteriose della matematica. Poiché non esistono resoconti di prima mano della sua vita e della sua opera, la sua figura è avvolta nel mito e nella leggenda e ciò rende difficile per gli storici separare la realtà dall'immaginazione. Quello che sembra certo è che Pitagora sviluppò l'idea della logica numerica e fu responsabile della fioritura della prima età aurea della matematica. Grazie al suo genio i numeri non furono più usati semplicemente per contare e calcolare, ma furono apprezzati nel loro autentico valore. Egli studiò le proprietà di certi numeri particolari, i rapporti tra i numeri e gli schemi che essi formavano. Pitagora capì che i numeri esistono indipendentemente dal mondo sensibile e che perciò il loro studio non è soggetto alle imprecisioni della percezione. Questo significa che egli potè scoprire verità indipendenti dall'opinione e dal pregiudizio e che erano più assolute di ogni precedente conoscenza.

Pitagora acquisì le sue abilità matematiche viaggiando nel mondo allora conosciuto. Alcuni racconti vorrebbero farci credere che si fosse spinto sino all'India e alla Gran Bretagna, ma è certo soltanto che egli raccolse molte tecniche e strumenti matematici dagli egiziani e dai babilonesi. Questi due popoli antichi si erano spinti al di là del semplice conteggio empirico ed erano capaci di eseguire calcoli complessi che permisero loro di elaborare sofisticati sistemi di numerazione e di costruire complessi edifici. Essi vedevano nella matematica un semplice strumento per risolvere problemi pratici e certamente la motivazione che li mosse a scoprire alcune regole basilari della geometria fu di ricostruire i confini dei campi che si smarrivano a seguito dell'annuale piena del Nilo. La stessa parola geometria significa «misurazione della terra».

Pitagora osservò che gli egiziani e i babilonesi sviluppavano ogni calcolo nella forma di una ricetta che poteva essere seguita ciecamente. Le ricette, trasmesse da una generazione all'altra, fornivano sempre la risposta esatta e perciò nessuno si preoccupava di metterle in dubbio o di indagare la logica sottostante alle equazioni. Per quelle civiltà era importante solo che il calcolo funzionasse; perché funzionasse era una questione che essi non prendevano in considerazione.

Dopo vent'anni di viaggi Pitagora aveva assimilato tutte le regole matematiche allora note nel mondo antico. Veleggiò alla volta di Samo, la sua isola, nel mare Egeo, con l'intenzione di fondarvi una scuola dedita allo studio della filosofia e che si occupasse particolarmente di ricerche sulle regole matematiche da poco acquisite. Egli sperava di trovare un folto numero di studenti amanti del libero pensiero che potessero aiutarlo a sviluppare una filosofia radicalmente nuova, ma durante la sua assenza dall'isola il tiranno Policrate aveva trasformato la città un tempo liberale in una società intollerante e conservatrice. Policrate invitò Pitagora a unirsi alla sua corte, ma il filosofo capì che era solo un tentativo per metterlo a tacere e perciò declinò l'invito. Lasciò allora la città, ritirandosi in una spelonca in una parte remota dell'isola dove poteva meditare senza tema di essere perseguitato.

A Pitagora l'isolamento non piacque e alla fine si trovò costretto a pagare un giovinetto perché diventasse suo alunno. L'identità del ragazzo è incerta, ma alcuni storici hanno suggerito che anche lui si chiamasse Pitagora e che questo studente, in seguito, sarebbe diventato famoso per essere stato il primo a suggerire che gli atleti dovevano cibarsi di carne per migliorare la propria condizione fisica. Pitagora, l'insegnante, pagava allo studente tre oboli per ogni lezione frequentata e si accorse che, con il passare delle settimane, l'iniziale riluttanza del ragazzo ad apprendere si era trasformata in entusiasmo per il sapere. Per misurare il proprio successo Pitagora finse di non poter più permettersi di pagare lo studente e che le lezioni dovevano cessare; allora lo studente, per non dover interrompere la propria istruzione, si offrì di pagare lui il maestro. L'alunno era così diventato un discepolo. Purtroppo questa fu la sola conversione che Pitagora riuscì a praticare a Samo. Stabilì temporaneamente una scuola nota come il Semicerchio di Pitagora, ma le sue idee di riforma sociale erano inaccettabili e il filosofo fu costretto a fuggire dalla colonia con la madre e l'unico discepolo.

Pitagora partì alla volta dell'Italia meridionale, parte della Magna Grecia, e si stabilì a Crotone dove ebbe la fortuna di trovare un patrono ideale in Milone, l'uomo più ricco della città e uno degli uomini più robusti che siano mai esistiti. La fama di Pitagora come sapiente di Samo si era già diffusa in tutta la Grecia, ma quella di Milone era ancora più grande. Era un uomo di dimensioni erculee, che era stato campione per dodici volte nei Giochi Olimpici e nei Giochi Pitici. Oltre all'atletismo, Milone apprezzava e praticava anche la filosofia e la matematica. Mise a disposizione una parte della propria casa e offrì a Pitagora stanze sufficienti per l'istituzione di una scuola. Avvenne così che la mente più creativa e il corpo più potente formarono un sodalizio.

Al sicuro nella sua nuova dimora, Pitagora fondò il Sodalizio pitagorico, un gruppo di seicento seguaci non soltanto in grado di capire i suoi insegnamenti, ma anche capaci di contribuire alla dottrina pitagorica elaborando nuove idee e nuove

dimostrazioni. Entrando nel Sodalizio ogni seguace doveva versare in un fondo comune tutti i propri beni materiali e se qualcuno avesse deciso di andarsene, avrebbe ricevuto il doppio della ricchezza donata in origine e una lapide sarebbe stata eretta in suo ricordo. Il Sodalizio pitagorico era una scuola egualitaria e comprendeva parecchie donne. L'allievo favorito di Pitagora era la figlia dello stesso Milone, la bellissima Teano e, nonostante la differenza d'età, essi finirono per sposarsi.

Subito dopo aver fondato il Sodalizio, Pitagora coniò la parola *filosofo* e, così facendo, definì gli scopi della scuola.

Mentre assisteva ai Giochi Olimpici, Leone, principe di Flio, chiese a Pitagora come si sarebbe definito. Pitagora rispose: «Io sono un filosofo», ma Leone non aveva mai sentito prima quella parola e gli chiese di spiegarsi.

> La vita, principe Leone, può essere ben a ragione paragonata a questi Giochi pubblici, perché nella vasta folla qui convenuta taluni sono attirati dal guadagno, altri sono mossi solo dalla speranza e dall'ambizione di ottenere la fama e la gloria. Ma tra costoro ve ne sono alcuni, che sono venuti qui per osservare e capire che cosa accade.
>
> Nella vita avviene lo stesso. Alcuni sono influenzati dall'amore della ricchezza, mentre altri sono ciecamente condotti dal folle desiderio di potere e di dominio, ma l'uomo migliore si dedica a scoprire il significato e lo scopo della vita stessa. Egli cerca di scoprire i segreti della natura. E questo l'uomo che io chiamo filosofo perché, sebbene nessun uomo sia completamente saggio sotto ogni rispetto, egli può amare la sapienza in quanto chiave di accesso ai segreti della natura.

Anche se molti erano consapevoli delle aspirazioni di Pitagora, nessuno fuori del Sodalizio conosceva i dettagli o la misura del suo successo. Ogni membro della scuola età costretto a giurare di non rivelare mai all'esterno nessuna delle loro scoperte matematiche. Perfino dopo la morte di Pitagora, un membro del Sodalizio venne annegato per aver rotto il giuramento: aveva annunciato pubblicamente la scoperta di un nuovo solido regolare, il dodecaedro, costruito da dodici pentagoni regolari. Il carattere segreto del Sodalizio pitagorico è una delle ragioni del fiorire di leggende sugli strani rituali che i pitagorici avrebbero praticato ed è anche una causa della scarsità di fonti attendibili sulle loro dottrine matematiche.

Ciò che si sa per certo è che Pitagora istituì un ethos che ha cambiato il corso della matematica. Il Sodalizio era effettivamente una comunità religiosa e uno degli idoli adorati era il Numero. Comprendendo i rapporti tra i numeri, i pitagorici credevano di poter scoprire i segreti spirituali dell'universo e di avvicinarsi agli dèi. In particolare il Sodalizio concentrò la propria attenzione sullo studio dei numeri naturali (1, 2, 3...) e delle frazioni. I numeri naturali sono talvolta chiamati *numeri interi* e insieme con le frazioni (che esprimono la *ratio*, cioè il rapporto, tra numeri interi) vengono tecnicamente designati come *numeri razionali*. Nell'infinità dei numeri i pitagorici cercavano quelli che avevano un significato speciale e tra i più speciali erano i cosiddetti numeri «perfetti».

Secondo Pitagora la perfezione numerica dipendeva dai divisori di un numero (cioè quei numeri che dividono perfettamente un numero). Per esempio i divisori di 12

sono 1, 2, 3, 4 e 6. Quando la somma dei divisori di un numero è maggiore del numero stesso, quel numero viene definito un numero «eccedente». Perciò 12 è un numero eccedente perché i suoi divisori, addizionati, danno come somma 16. D'altro canto quando la somma dei divisori di un numero è inferiore al numero stesso, il numero è chiamato «difettivo». Così 10 è un numero difettivo perché i suoi divisori (1, 2 e 5), addizionati, danno soltanto 8.

I numeri più rari e importanti sono quelli i cui divisori, addizionati, danno esattamente come somma il numero in questione. Questi sono i numeri perfetti. Il 6 ha come divisori 1, 2 e 3, di conseguenza è un numero perfetto, perché $1 + 2 + 3 = 6$. Il successivo numero perfetto è 28, perché $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

Oltre ad avere importanza matematica per i pitagorici, la perfezione del 6 e del 28 era riconosciuta da altre culture che notarono che la luna orbita intorno alla terra in 28 giorni e che affermarono che Dio creò il mondo in sei giorni. Nella *Città di Dio* sant'Agostino afferma che, sebbene Dio avrebbe potuto creare il mondo in un istante, decise di impiegare sei giorni per esprimere con quel numero la perfezione dell'universo. Sant'Agostino osservò che il 6 non era perfetto perché Dio l'aveva scelto, ma piuttosto che la perfezione era inerente alla natura del numero: «6 è un numero perfetto in se stesso e non perché Dio ha creato tutte le cose in sei giorni; è piuttosto vero l'inverso; Dio ha creato tutte le cose in sei giorni perché questo numero è perfetto. E rimarrebbe tale anche se l'opera creata in sei giorni non esistesse».

Salendo nella serie dei numeri naturali, è sempre più difficile trovare numeri perfetti, Il terzo numero perfetto è 496, il quarto 8128, il quinto 33.550.336 e il sesto è 8.589.869.056. Pitagora notò che i numeri perfetti, oltre a essere la somma di tutti i loro divisori, presentavano parecchie altre eleganti proprietà. Tra l'altro, i numeri perfetti sono sempre la somma di una serie di numeri naturali consecutivi. Ad esempio:

$$
\begin{aligned}
6 &= 1 + 2 + 3, \\
28 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7, \\
496 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + \ldots + 30 + 31, \\
8128 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + \ldots + 126 + 127.
\end{aligned}
$$

Pitagora si compiaceva dei numeri perfetti, ma non era appagato semplicemente dal loro ritrovamento; desiderava piuttosto scoprirne il significato profondo. Una delle sue intuizioni fu che la perfezione era strettamente connessa al «due». I numeri 4 (2 x 2), 8 (2 x 2 x 2), 16 (2 x 2 x 2 x 2), etc, sono noti come potenze di 2 e possono essere scritti come 2^n , dove la n rappresenta il numero di 2 moltiplicati tra loro. Tutte queste potenze di 2 non sono numeri perfetti per uno scarto minimo, poiché la somma dei loro divisori ammonta sempre a una cifra inferiore di un'unità al numero stesso. Questo li rende solo lievemente difettivi:

$2^2 = (2 \times 2)$	$= 4$	Divisori 1, 2	Somma = 3,
$2^3 = (2 \times 2 \times 2)$	$= 8$	Divisori 1, 2, 4	Somma = 7,
$2^4 = (2 \times 2 \times 2 \times 2)$	$= 16$	Divisori 1, 2, 4, 8	Somma = 15,
$2^5 = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)$	$= 32$	Divisori 1, 2, 4, 8, 16	Somma = 31.

Due secoli dopo, Euclide avrebbe perfezionato il nesso istituito da Pitagora tra il due e la perfezione. Euclide scoprì che i numeri perfetti sono sempre multipli di due numeri, uno dei quali è una potenza di 2 e l'altro è la successiva potenza di 2 meno 1. Vale a dire:

$$\begin{aligned} 6 &= 2^1 \times (22 - 1) \\ 28 &= 2^2 \times (23 - 1) \\ 496 &= 2^4 \times (25 - 1) \\ 8128 &= 2^6 \times (27 - 1) \end{aligned}$$

Oggi i computer hanno continuato la ricerca dei numeri perfetti e hanno trovato esempi di numeri colossali come $2^{216.090} \times (2^{216.091} - 1)$, un numero con più di centotrentamila cifre che obbedisce alla regola di Euclide.

Pitagora era affascinato dalla ricchezza di schemi e di proprietà posseduti dai numeri perfetti e ne venerava la sottigliezza e la sagacia. A prima vista i numeri perfetti sono un concetto relativamente semplice da comprendere e tuttavia gli antichi greci non riuscirono a sondare alcuni aspetti fondamentali del tema. Per esempio, benché ci siano moltissimi numeri i cui divisori, addizionati, danno una somma inferiore di una sola unità al numero in questione, vale a dire numeri solo lievemente difettivi, non sembra che esistano numeri lievemente eccedenti. I greci non riuscirono a trovare alcun numero i cui divisori, addizionati, dessero come somma una cifra superiore di una sola unità al numero stesso, ma non seppero spiegare perché. Purtroppo, benché non riuscissero a scoprire numeri lievemente eccedenti, non poterono dimostrare l'inesistenza di tali numeri. Capire perché non ci fossero questi numeri lievemente eccedenti non aveva alcun valore pratico e tuttavia era un problema che poteva illuminare la natura dei numeri ed era perciò degno di studio. Enigmi come questi attiravano l'attenzione dei pitagorici e duemilacinquecento anni dopo i matematici non sono ancora in grado di dimostrare che i numeri lievemente eccedenti non esistono.

Tutto è numero

Oltre a studiare i rapporti tra i numeri, Pitagora era anche attratto dal nesso tra i numeri e la natura. Egli capi che i fenomeni naturali sono governati da leggi e che queste leggi possono essere descritte con equazioni matematiche. Uno dei primi nessi da lui scoperti fu la relazione fondamentale tra l' armonia musicale e l'armonia dei numeri.

Il più importante strumento nella musica greca dell'età più antica era la lira a quattro corde. Prima di Pitagora i musici avevano notato che note particolari suonate insieme producevano un effetto piacevole e avevano accordato la lira in modo che, pizzicando due corde, potessero produrre tale armonia. Tuttavia i primi musici non capivano perché certe note particolari fossero armoniche e non avevano un metodo per accordare i propri strumenti. Li accordavano ad orecchio, finché non si produceva

una condizione di armonia: una procedura che Platone definì torturare i cavicchi per l'accordatura.

Giamblico, il filosofo del quarto secolo d.C. che scrisse nove libri sulla setta pitagorica, descrive come Pitagora giunse a scoprire i principi sottesi all' armonia musicale:

> Una volta era immerso nel pensiero di escogitare un ausilio meccanico per il senso dell'udito che potesse dimostrarsi preciso e ingegnoso. Tale strumento doveva assomigliare ai compassi, alle squadre e agli strumenti ottici utili al senso della vista. Allo stesso modo il tatto dispone di bilance e delle nozioni di pesi e misure. Per un divino colpo di fortuna gli capitò di passare davanti alla fucina di un fabbro e di ascoltare i martelli che battevano il ferro e producevano una variegata armonia di suoni tranne in un caso.

Secondo Giamblico, Pitagora entrò subito nella fucina per indagare l'armonia dei martelli. Notò che la maggior parte dei martelli potevano essere colpiti simultaneamente per generare un suono armonico, mentre ogni combinazione che prevedesse un particolare martello produceva sempre un rumore spiacevole. Analizzò i martelli e capì che tra quelli che erano armonici sussisteva una semplice relazione matematica: le loro masse erano in un rapporto frazionario semplice tra loro. Ciò significava che i martelli che pesavano la metà o due terzi o tre quarti di un particolare martello avrebbero tutti prodotto suoni armonici. D'altro lato il martello che produceva disarmonia quando veniva impiegato insieme con qualche altro martello aveva un peso che non era in un rapporto semplice con gli altri pesi.

Pitagora aveva scoperto i semplici rapporti numerici responsabili dell'armonia nella musica. Gli scienziati hanno sollevato qualche dubbio sulla veridicità del racconto di Giamblico, ma ciò che è più certo è che Pitagora applicò la sua nuova teoria dei rapporti musicali alla lira, esaminando le proprietà di una singola corda. Il semplice pizzicare una corda genera una nota o tono fondamentale che è prodotto dall'intera lunghezza della corda vibrante. Fissando la corda in punti particolari lungo la sua lunghezza, è possibile generare altre vibrazioni e toni. Toni armonici significativi si producono solo in punti specifici. Per esempio, se si fissa la corda in un punto esattamente a metà della sua lunghezza, si genera un tono che è di un'ottava più alto e in armonia con la nota originaria. Analogamente, fissando la corda in punti che sono esattamente un terzo, un quarto o un quinto della sua estensione, si producono altre note armoniche. Invece, fissando la corda in un punto che non è una semplice frazione della lunghezza dell'intera corda, si genera un tono che non è in armonia con gli altri toni.

Pitagora aveva scoperto la regola matematica che governava un fenomeno fisico e aveva dimostrato che tra la matematica e la scienza della natura c'era una relazione fondamentale. Dopo questa scoperta, gli scienziati hanno sempre cercato regole matematiche che sembrano governare ogni processo fisico e hanno scoperto che i numeri emergono in ogni sorta di fenomeno naturale. Per esempio, un particolare numero sembra determinare la lunghezza dei fiumi che formano meandri. Il professor Hans-Henrik Stølum, uno scienziato della terra all'Università di Cambridge, ha

calcolato il rapporto tra la lunghezza effettiva dei fiumi dalla sorgente alla foce e la loro lunghezza in linea d'aria. Anche se il rapporto varia tra un fiume e l'altro, il valore medio è leggermente superiore a 3, cioè la lunghezza effettiva è circa tre volte maggiore della distanza diretta in linea d'aria. In realtà il rapporto è all'inarca di 3,14, che è il valore approssimato di π, ossia del rapporto tra la circonferenza e il diametro del cerchio.

Il numero π deriva originariamente dalla geometria del cerchio e tuttavia riappare continuamente in una varietà di circostanze fisiche. Nel caso dei fiumi, la comparsa di π è il risultato di una battaglia tra l'ordine e il caos. Einstein fu il primo a suggerire che i fiumi tendono a seguire un percorso sempre più tortuoso perché la corrente, essendo più veloce sulla parte esterna di una curva, produce un'erosione maggiore sulla sponda corrispondente, così che la curvatura in quel punto aumenta. Più accentuata è la curvatura, più forte è la corrente sulla sponda esterna e di conseguenza maggiore è l'erosione. Il fiume perciò tende a procedere sempre più tortuosamente. C'è però un processo naturale che spezza questa evoluzione caotica: la crescente tortuosità avrà come risultato che il corso del fiume si ripiega su se stesso fino a fondersi; in tal caso il corso del fiume si raddrizza e l'ansa viene lasciata da una parte a formare una specie di lago semicircolare. L'equilibrio tra questi due fattori opposti conduce a un rapporto medio di π tra l'effettiva lunghezza e la distanza in linea retta tra la sorgente e la foce. Il rapporto di π si trova più comunemente in quei fiumi che scorrono attraverso pianure che hanno un dislivello molto tenue, come i fiumi in Brasile o nella tundra siberiana Pitagora comprese che i numeri erano celati in tutte le cose, dall' armonia musicale alle orbite dei pianeti, e ciò lo indusse a proclamare che «tutto è numero». Esplorando il significato della matematica Pitagora stava sviluppando il linguaggio che avrebbe consentito a lui e ad altri di descrivere la natura dell'universo. Da allora in poi ogni progresso matematico avrebbe dato agli scienziati il vocabolario di cui avevano bisogno per spiegare meglio i fenomeni circostanti. Infatti gli sviluppi nella matematica avrebbero ispirato le rivoluzioni scientifiche.

Di tutti i nessi fra i numeri e la natura scoperti dai pitagorici il più importante fu il rapporto che reca il nome del fondatore della scuola. Il teorema di Pitagora ci offre un'equazione valida per tutti i triangoli rettangoli e che perciò definisce anche lo stesso angolo retto. A sua volta l'angolo retto definisce la perpendicolare, ossia la relazione tra verticale e orizzontale e infine la relazione tra le tre dimensioni dell'universo a noi familiare. La matematica, attraverso l'angolo retto, definisce proprio la struttura dello spazio nel quale viviamo.

È una comprensione profonda e tuttavia la matematica richiesta per intendere il teorema di Pitagora è relativamente semplice. Per capirlo basta cominciare con il misurare la lunghezza dei due lati più corti (i cateti) di un triangolo rettangolo (x e y) e poi elevare al quadrato ognuno dei due (x^2, y^2). Sommate poi i due quadrati ($x^2 + y^2$) per ottenere il risultato finale. Se calcolate il numero per il triangolo della figura 1.1, vedrete che è 25.

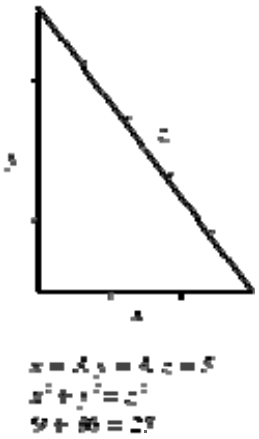


Figura 1.1: Tutti i triangoli rettangoli obbediscono al teorema di Pitagora.

Ora potete misurare il lato più lungo, l'ipotenusa, ed elevare al quadrato la sua lunghezza. Il risultato notevole è che questo numero è identico a quello che avete appena calcolato, cioè $5^2 = 25$. Vale a dire:

> In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.
>
> Ovvero, simbolicamente:
>
> $$x^2 + y^2 = z^2$$

Questo è evidentemente vero per il triangolo mostrato nella figura 1.1, ma il fatto significativo è che il teorema di Pitagora è vero per ogni triangolo rettangolo che possiate immaginare. È una legge matematica universale e potete affidarvi a essa ogni volta che incontrate un triangolo con un angolo retto. Viceversa se avete un triangolo che obbedisce al teorema di Pitagora, allora potete essere assolutamente certi che si tratta di un triangolo rettangolo.

A questo punto è importante notare che sebbene questo teorema sarà per sempre associato al nome di Pitagora, era effettivamente noto ai cinesi e ai babilonesi mille anni prima. Tuttavia quelle civiltà non sapevano che il teorema era vero per tutti i triangoli rettangoli. Era certamente vero per i triangoli che loro avevano misurato, ma essi non avevano modo di mostrare che fosse vero anche per tutti i triangoli che non avevano misurato. La ragione per cui il teorema è attribuito a Pitagora sta nel fatto che egli fu il primo a dimostrarne la verità universale.

Ma come sapeva Pitagora che il suo teorema valeva per tutti i triangoli rettangoli? Egli non poteva certo sperare di misurare l'infinita varietà dei triangoli rettangoli e tuttavia poteva essere al cento per cento sicuro della verità del suo teorema. La ragione di questa fiducia sta nel concetto di dimostrazione matematica. La ricerca di una dimostrazione matematica è la ricerca di una conoscenza che è più assoluta della conoscenza accumulata da ogni altra disciplina. Il desiderio di una verità definitiva ottenuta attraverso il metodo della dimostrazione è ciò che ha guidato i matematici negli ultimi duemilacinquecento anni.

La prova assoluta

La storia dell'Ultimo Teorema di Fermat riguarda la ricerca di una dimostrazione mancante. La prova matematica, la dimostrazione, è di gran lunga più potente dell'idea di prova che adoperiamo casualmente nella vita quotidiana e persino del concetto di prova adottato dai fisici o dai chimici. La differenza tra prova matematica e prova scientifica è sottile ma profonda ed è di importanza cruciale per capire il lavoro di ogni matematico a partire da Pitagora.

Una dimostrazione matematica classica deve iniziare con una serie di assiomi, asserzioni che possono essere assunte come vere o che sono palesemente vere. Quindi, argomentando logicamente, passo dopo passo, è possibile arrivare a una conclusione. Se gli assiomi sono corretti e l'argomentazione logica è impeccabile, allora la conclusione sarà irrefutabile. La conclusione è il teorema.

Le dimostrazioni matematiche si basano su questo procedimento logico e una volta provate restano vere fino alla fine dei tempi. Le dimostrazioni matematiche sono assolute. Per apprezzarne meglio il valore, dobbiamo paragonarle alla loro parente povera, la prova scientifica. Nella scienza si avanza un'ipotesi per spiegare un fenomeno fisico. Se le osservazioni sul fenomeno si accordano con l'ipotesi, questo diviene un indizio a suo favore. Inoltre, l'ipotesi non dovrebbe soltanto descrivere un fenomeno noto, ma prevedere gli esiti di altri fenomeni. Si possono eseguire esperimenti per verificare il potere di previsione dell'ipotesi, e se essa si dimostra di nuovo efficace, allora si hanno ulteriori indizi a suo sostegno. Alla fine il peso degli indizi può essere schiacciante e l'ipotesi viene accolta come una teoria.

Una teoria scientifica non può mai essere dimostrata con lo stesso grado di assoluta certezza con cui si dimostra un teorema matematico: essa viene soltanto considerata altamente probabile in base agli indizi disponibili. La cosiddetta prova scientifica si fonda sull'osservazione e la percezione, le quali sono entrambe fallibili e possono soltanto fornire un'approssimazione della verità. Come ha sottolineato Bertrand Russell: «Anche se può sembrare un paradosso, tutta la scienza esatta è dominata dall'idea di approssimazione». Persino le «prove» scientifiche più largamente accettate, recano sempre con sé qualche piccolo elemento di dubbio. Talvolta il dubbio si affievolisce, benché non scompaia mai del tutto, mentre in altre occasioni la prova si dimostra infine sbagliata. Questa debolezza della prova scientifica conduce alle rivoluzioni scientifiche in cui una teoria considerata corretta viene sostituita da un'altra teoria, che può essere soltanto una versione più raffinata della teoria originale, ma che può anche esserne la negazione completa.

Per esempio, la ricerca dei componenti fondamentali della materia ha coinvolto ogni generazione di fisici, i quali hanno rovesciato o, per lo meno, perfezionato la teoria dei loro predecessori. La moderna ricerca degli elementi sui quali è costruito l'universo iniziò al principio dell'Ottocento con una serie di esperimenti condotti da John Dalton per avanzare l'ipotesi che tutto fosse composto di atomi discreti e che gli atomi fossero i componenti basilari. Alla fine del secolo J.J. Thomson scoprì l' elettrone, la prima particella subatomica, e perciò l' atomo non fu più considerato basilare.

Durante i primi anni del Novecento i fisici svilupparono una descrizione «completa» dell'atomo: un nucleo consistente di protoni e di neutroni, attorno al quale orbitano gli elettroni. Si riteneva orgogliosamente che protoni, neutroni ed elettroni fossero gli ingredienti unici e finali dell'universo. Gli esperimenti sui raggi cosmici rivelarono però l'esistenza di altre particelle fondamentali, i pioni e i muoni. Una rivoluzione ancor più grande si verificò con la scoperta nel 1932 dell' antimateria, che significava l'esistenza di antiprotoni, antineutroni, antielettroni etc. Sebbene i fisici delle particelle non potessero sapere con certezza quante particelle esistevano, erano almeno sicuri che queste entità fossero quelle basilari. Tale certezza si mantenne fino agli anni Sessanta, quando nacque il concetto di quark. Il protone stesso è in apparenza costituito da quark con carica frazionaria, come pure il neutrone, il pione e il muone. La morale della storia è che i fisici mutano continuamente la loro immagine dell'universo, quando non la cancellano del tutto per ricominciare da capo. Nel prossimo decennio il concetto stesso di particella come oggetto puntiforme potrebbe essere sostituito dall'idea di particelle come «corde» , le stesse corde che potrebbero spiegare meglio la gravità. La teoria è che corde lunghe quanto un miliardesimo di miliardesimo di miliardesimo di miliardesimo di metro (così piccole da apparire puntiformi) possono vibrare in modi diversi e ogni vibrazione dà origine a una diversa particella. Questa teoria è analoga alla scoperta di Pitagora che la corda di una lira può dare origine a note diverse a seconda di come vibra.

Il futurologo e scrittore di fantascienza Arthur C. Clarke scrisse che se un illustre professore afferma che qualcosa è indubitabilmente vero, allora è probabile che il giorno dopo la sua teoria si rivelerà falsa. La prova scientifica è inevitabilmente precaria e di qualità inferiore. D'altro canto la dimostrazione matematica è assoluta e indubitabile. Pitagora morì certo che il suo teorema, che era vero nel quinto secolo a.C. sarebbe rimasto vero per l'eternità.

La scienza procede come il sistema giudiziario. Una teoria viene assunta per vera se vi sono indizi sufficienti a dimostrarla «oltre ogni ragionevole dubbio». La matematica invece non si affida a esperimenti fallibili, ma è costruita su una logica infallibile. Lo dimostra, a titolo di esempio, il problema della «scacchiera mutilata» illustrato nella figura 1.2.

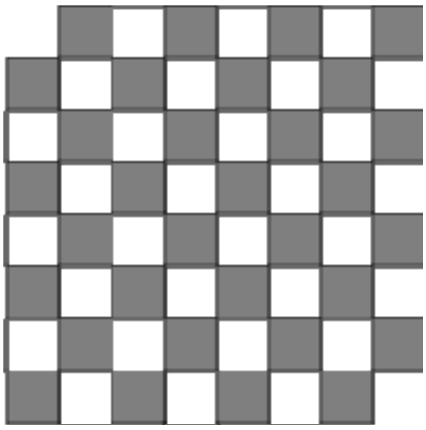


Figura 1.2: Il problema della scacchiera mutilata.

Immaginate una scacchiera priva dei due angoli opposti bianchi, in modo che rimangono solo 62 scacchi. Prendete allora 31 tessere di domino di dimensione tale che ogni tessera ricopre esattamente due scacchi. La domanda è: è possibile disporre le 31 tessere in modo che ricoprano tutti i 62 scacchi della scacchiera?

Vi sono due modi di affrontare il problema:

a) L'approccio scientifico

Lo scienziato cercherebbe di risolvere il problema sperimentalmente, e dopo avere sperimentato qualche decina di combinazioni scoprirebbe che tutte falliscono. Alla fine egli ritiene che vi siano sufficienti indizi per dire che la scacchiera non può essere coperta. Tuttavia, lo scienziato non può mai essere certo che questo sia sempre vero, perché potrebbero esserci combinazioni da lui non sperimentate che potrebbero avere successo. Vi sono migliaia di combinazioni differenti ed è possibile sperimentarne solo una piccola quota. La conclusione che sia impossibile coprire la scacchiera è una teoria basata sull'esperimento, ma lo scienziato dovrà vivere nella prospettiva che un giorno la sua teoria possa essere capovolta.

b) L'approccio matematico

Il matematico cerca di rispondere alla questione sviluppando un argomento logico da cui deriverà una conclusione indubitabilmente corretta e che rimarrà inconfutabile per sempre. Un argomento del genere è il seguente:

- Gli angoli tolti dalla scacchiera erano entrambi bianchi. Perciò ora ci sono 32 scacchi neri e solo 30 scacchi bianchi.
- Ogni tessera del domino copre due scacchi contigui e gli scacchi contigui hanno sempre colore diverso, ossia l'uno è bianco e l'altro è nero o viceversa.
- Pertanto, a prescindere dalla disposizione, le prime 30 tessere di domino poste sulla scacchiera devono coprire 30 scacchi bianchi e 30 scacchi neri.
- Di conseguenza, resterà sempre una tessera di domino e due scacchi neri.
- Ma, si rammenti che ogni tessera copre due scacchi contigui e che gli scacchi contigui sono di colore opposto. I due scacchi rimanenti devono invece avere lo stesso colore e perciò non possono essere entrambi coperti dalla tessera restante. Dunque, coprire la scacchiera è impossibile!

Questa prova dimostra che ogni possibile combinazione delle tessere del domino non riuscirà a coprire la scacchiera mutilata. Analogamente Pitagora costruì una dimostrazione per provare che ogni possibile triangolo rettangolo obbedisce al suo teorema. Per Pitagora il concetto di dimostrazione matematica era sacro ed era il metodo dimostrativo che m consentì al Sodalizio di fare tante scoperte. La maggior parte delle dimostrazioni nella matematica moderna sono incredibilmente complicate e seguirne la logica sarebbe impossibile per un profano, ma fortunatamente nel caso del teorema di Pitagora l'argomentazione è relativamente lineare e richiede, per

essere compresa, solo nozioni matematiche che si apprendono nella scuola media. La dimostrazione è svolta nell'appendice 1.

La dimostrazione di Pitagora è irrefutabile. Essa prova che il suo teorema è vero per ogni triangolo rettangolo nell'universo. La scoperta fu così importante che vennero sacrificati cento buoi in segno di gratitudine verso gli dèi. Fu una pietra miliare nella matematica e una delle più importanti conquiste nella storia della civiltà. La sua importanza era duplice. In primo luogo introduceva l'idea di dimostrazione. Un risultato matematico dimostrato possiede una verità più profonda di ogni altra perché è il risultato di una logica graduale. Anche se il filosofo Talete aveva già escogitato alcune dimostrazioni geometriche primitive, Pitagora sviluppò alquanto il procedimento dimostrativo e fu in grado di provare enunciati matematici assai più complessi. La seconda conseguenza del teorema di Pitagora è che esso connette il metodo matematico astratto a qualcosa di tangibile. Pitagora mostrò che la verità matematica poteva essere applicata alla conoscenza scientifica del mondo, alla quale offriva un fondamento logico. La matematica dà alla scienza un punto di partenza rigoroso. A questo fondamento infallibile gli scienziati aggiungono misurazioni imprecise e osservazioni imperfette.

Un'infinità di terne

I pitagorici rafforzarono la matematica con la loro zelante ricerca della verità attraverso la dimostrazione. Si diffuse la notizia dei loro successi, ma i dettagli delle loro scoperte rimasero un segreto accuratamente custodito. Molti chiesero di essere ammessi al santuario della conoscenza, ma solo gli intelletti più acuti vennero accolti. Un candidato respinto si chiamava Cilone. Cilone non accettò l'umiliazione di essere rifiutato e vent'anni dopo si vendicò.

Durante la sessantasettesima Olimpiade (510 a.C.) ci fu una rivolta nella vicina città di Sibari. Teli, il capo vittorioso dei ribelli iniziò una barbara persecuzione dei sostenitori del precedente governo, che indusse molti di loro a cercare rifugio a Crotone. Teli chiese che i traditori fossero rispediti a Sibari per scontare la pena dovuta, ma Milone e Pitagora persuasero i crotoniati a opporsi al tiranno e a proteggere i rifugiati. Teli si infuriò e raccolse subito un esercito di trecentomila uomini per marciare su Crotone, dove Milone difendeva la città con centomila cittadini armati. Dopo settanta giorni di guerra, Milone, comandante supremo, guidò i crotoniati alla vittoria e per ritorsione essi deviarono il corso del fiume Crati verso la città di Sibari, per inondarla e distruggerla.

Nonostante la fine della guerra, Crotone era ancora in tumulto a causa delle liti sulla spartizione del bottino di guerra. Temendo che la terra sarebbe stata assegnata all' élite pitagorica, il popolo crotoniate cominciò a rumoreggiare. Fra le masse serpeggiava già un crescente risentimento perché i pitagorici continuavano a mantenere segrete le loro scoperte, ma nulla accadde finché Cilone si fece avanti come portavoce del popolo. Cilone fece leva sulla paura, sulla frustrazione e sull'invidia della plebaglia e la guidò nell'opera di distruzione della più geniale scuola matematica che il mondo abbia mai conosciuto. La casa di Milone e la scuola

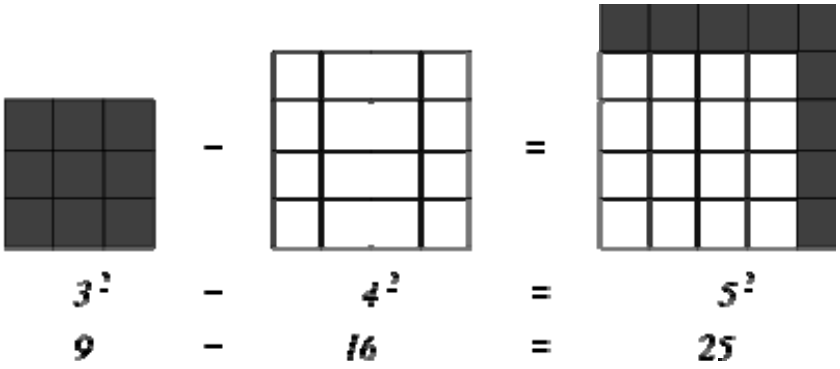


Figura 1.3: Dovendo trovare soluzioni con numeri interi all'equazione di Pitagora si può pensare a trovare due quadrati che, addizionati, possono formare un terzo quadrato. Per esempio, un quadrato composto di 9 mattonelle può essere aggiunto a un quadrato di 16 mattonelle, per formarne un terzo composto di 25 mattonelle.

adiacente furono circondate, tutte le porte furono sprangate per impedire la fuga e poi fu appiccato il fuoco. Milone riuscì a scappare dall'inferno e fuggì, ma Pitagora e molti suoi discepoli rimasero uccisi.

La matematica aveva perso il suo primo grande eroe, ma lo spirito pitagorico sopravvisse. I numeri e le loro verità erano immortali. Pitagora aveva dimostrato che la matematica, più di ogni altra disciplina, è una materia svincolata dalla soggettività di chi la pratica. I suoi discepoli non avevano bisogno del maestro per decidere della validità di una particolare teoria. La verità di una teoria era indipendente dall'opinione dei singoli. Al contrario, arbitra della verità era diventata la costruzione della logica matematica. Fu questo il massimo contributo pitagorico alla civiltà: un metodo di acquisire la verità che oltrepassa la fallibilità del giudizio umano.

A seguito della morte del fondatore e dell'aggressione di Cilone, i pitagorici lasciarono Crotone per recarsi in altre città della Magna Grecia, ma le persecuzioni continuarono e alla fine molti dovettero stabilirsi in terra straniera. Questa migrazione coatta incoraggiò i pitagorici a diffondere il loro vangelo matematico per tutto il mondo antico. I discepoli di Pitagora istituirono nuove scuole e insegnarono agli studenti il metodo della dimostrazione logica. Oltre alla dimostrazione del teorema di Pitagora, essi spiegarono al mondo il segreto per trovare le cosiddette terne pitagoriche.

Le terne pitagoriche sono combinazioni di tre numeri interi che soddisfano l'equazione di Pitagora: $x^2 + y^2 = z^2$. Per esempio, l'equazione pitagorica è valida se

$$x = 3,\ y = 4\ e\ z = 5:$$

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \qquad 9 + 16 = 25.$$

Un altro modo di considerare le terne pitagoriche è quello di ricomporre dei quadrati. Se si ha un quadrato 3 × 3, fatto di 9 mattonelle, e un quadrato 4 × 4, fatto di 16 mattonelle, allora tutte le mattonelle possono essere ridisposte per formare un quadrato 5 × 5, composto di 25 mattonelle, come mostrato nella figura 1.3.

I pitagorici volevano trovare altre terne, altri quadrati che, sommati, formassero un terzo quadrato più grande. Un'altra terna pitagorica è $x = 5,\ y = 12\ e\ z = 13:$

$$5^2 + 12^2 = 13^2 \qquad 25 + 144 = 169.$$

Una terna pitagorica più grande è x = 99, y = 4900 e z = 4901. Salendo nella serie numerica le terne diventano più rare e trovarle è sempre più difficile. Per scoprire quante più terne fosse possibile i pitagorici inventarono un metodo per trovarle e nel far ciò dimostrarono altresì che il loro numero è infinito.

Dal teorema di Pitagora all'Ultimo Teorema di Fermat

Il teorema di Pitagora e l'infinità delle terne pitagoriche furono discussi da E.T. Bell in *The Last Problem*, il libro che attrasse l'attenzione del giovane Andrew Wiles. Anche se i pitagorici avevano compreso quasi completamente le terne, Wiles scoprì subito che questa equazione apparentemente innocua $x^2 + y^2 = z^2$, aveva un lato oscuro: Bell descriveva nel suo libro l'esistenza di un mostro matematico.

Nell'equazione di Pitagora le tre variabili, x, y e z sono tutte al quadrato

(cioè $x^2 = x \times x$*):*

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Il libro descriveva però un'equazione sorella in cui *x, y, e z* sono tutte al cubo (cioè $x^3 = x \times x \times x$*)*. In questa equazione la cosiddetta potenza della x non è più 2, ma 3:

$$x^3 + y^3 = z^3.$$

Trovare i numeri interi ossia le terne pitagoriche che davano la soluzione della prima equazione era relativamente facile, ma, una volta mutata la potenza da 2 a 3 (dal quadrato al cubo), trovare soluzioni con numeri interi alla nuova equazione sembra impossibile. Generazioni di matematici, scribacchiando nei loro taccuini, non sono riusciti a trovare numeri che soddisfino l'equazione.

Nel caso dell'equazione originaria «al quadrato», la sfida era di ridisporre le mattonelle di due quadrati per formarne un terzo più grande. Con la versione «al cubo» la sfida è di ridisporre i mattoni che formano due cubi per formarne un terzo più grande. A quel che sembra, indipendentemente da quali cubi si scelgano, quando li si combina il risultato è o un cubo completo con alcuni mattoni di troppo che restano da parte o un cubo incompleto. Il risultato più vicino a una perfetta risistemazione che si sia mai ottenuto è quello in cui c'è solo un mattone in eccesso o in difetto. Per esempio, se cominciamo con i cubi 6^3 (x^3) e 8^3 (y^3) e ridisponiamo i mattoni, allora ne manca soltanto uno per ottenere un cubo completo di $9 \times 9 \times 9$, come mostrato nella figura 1.4.

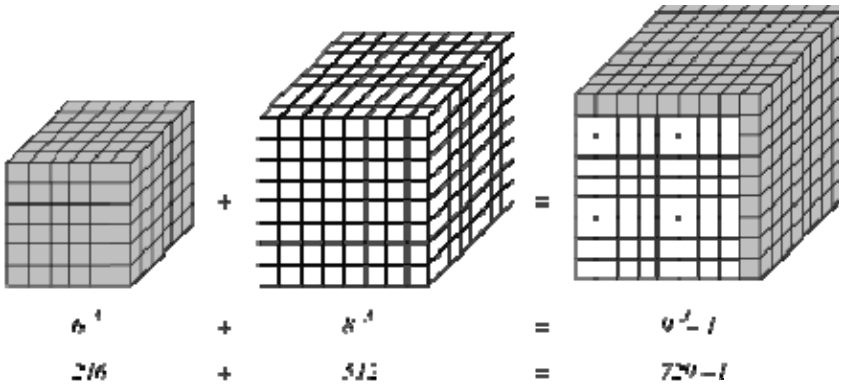


Figura 1.4: È possibile aggiungere i mattoni da un cubo a un altro cubo per formarne un terzo più grande? In questo caso un cubo di 6 × 6 × 6 aggiunto a un cubo di 8 × 8 × 8 non ha mattoni sufficienti per formare un cubo di 9 × 9 × 9. Nel primo cubo ci sono 216 (6^3) mattoni e nel secondo ce ne sono 512 (8^3). Il totale è di 728 mattoni, ossia uno in meno di 9^3.

Trovare tre numeri che soddisfino l'equazione «al cubo» sembra impossibile. Vale a dire che non sembrano esserci soluzioni in numeri interi per l'equazione

$$x^3 + y^3 = z^3$$

E inoltre, se la potenza viene cambiata da 3 (potenza al cubo) a un qualunque numero *n* più alto (cioè 4,5,6...), anche in questo caso sembra impossibile trovare una soluzione. Non sembrano esserci soluzioni con numeri interi per l'equazione più generale

$$x^n + y^n = z^n \text{ per } n \text{ maggiore di } 2.$$

Semplicemente cambiando il 2 nell'equazione di Pitagora con qualunque altro numero superiore, trovare una soluzione in numeri interi non è più relativamente semplice, ma diventa difficilissimo. E infatti il grande matematico francese del Seicento Pierre de Fermat fece la stupefacente affermazione che la ragione per la quale nessuno poteva trovare una soluzione era che la soluzione non esisteva.

Fermat fu uno dei più geniali e interessanti matematici della storia. Non poteva certo aver controllato l'infinità dei numeri, ma era assolutamente sicuro che non esistevano combinazioni che soddisfacessero l'equazione. La sua affermazione era basata su una dimostrazione. Come Pitagora, che non aveva bisogno di controllare ogni triangolo per dimostrare la validità del proprio teorema, così Fermat non doveva controllare ogni numero per mostrare la validità del suo teorema. L'Ultimo Teorema di Fermat, così come viene chiamato, affermava che

$$x^n + y^n = z^n$$

non ha soluzioni in numeri interi per *n* maggiore di 2.

Leggendo i capitoli del libro di Bell, Wiles apprese come Fermat fosse rimasto affascinato dall'opera di Pitagora e fosse giunto infine a studiare la forma degenerata dell'equazione pitagorica. Lesse poi che Fermat aveva sostenuto che persino se tutti i

matematici del mondo impiegassero un'eternità a cercare una soluzione all'equazione non riuscirebbero a trovarla. Wiles deve aver scorso le pagine avidamente, pregustando l'idea di esaminare la dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat. Ma la dimostrazione non c'era. Non si trovava né in quel libro né altrove. Bell affermava nella conclusione del suo libro che la dimostrazione era stata perduta molto tempo prima. Non c'erano indizi di come potesse essere, nessun accenno alla costruzione della dimostrazione o alla sua derivazione. Wiles rimase perplesso, arrabbiato e catturato. Era in buona compagnia.

Per più di trecento anni ogni grande matematico aveva cercato di riscoprire senza riuscirci la dimostrazione perduta di Fermat. Il fallimento di ogni generazione accresceva la frustrazione ma anche la determinazione della generazione successiva. Nel 1742, quasi un secolo dopo la morte di Fermat, il matematico svizzero Leonhard Euler chiese al suo amico Clêrot di perquisire la casa di Fermat per accertare se fosse rimasta qualche carta preziosa. Non furono mai trovati accenni alla possibile dimostrazione.

L'ultimo teorema di Fermat, un problema che per secoli aveva affascinato i matematici, catturò l'immaginazione del giovane Andrew Wiles. Un ragazzo di dieci anni, seduto nella Biblioteca di Milton Road, contemplava assorto il più I famigerato problema matematico. In genere metà della difficoltà in un problema matematico consiste nel capire la questione, che però in questo caso era semplice: si trattava di dimostrare che $x^n + y^n = z^n$ è priva di soluzioni in numeri interi per n maggiore di 2. Andrew non si fece scoraggiare dall'idea che le menti più intelligenti del pianeta non erano riuscite a trovare la dimostrazione. Si mise immediatamente a lavorare usando tutte le tecniche manualistiche a lui note per cercare di ricreare la dimostrazione. Forse poteva trovare qualcosa che tutti gli altri, tranne Fermat, avevano trascurato. Il bambino sognò di poter stupire il mondo.

Trent'anni dopo Andrew Wiles era pronto. Dinanzi al pubblico del Sir Isaac Newton Institute scrisse qualcosa sulla lavagna, poi, sforzandosi di trattenere la gioia, fissò l'uditorio. La conferenza stava toccando il culmine e gli ascoltatori lo sapevano. Uno o due di loro avevano portato di nascosto qualche macchina fotografica nella sala e i flash lampeggiarono mentre Andrew concludeva il suo discorso.

Con il gesso in mano Andrew si girò verso la lavagna per l'ultima volta. Gli ultimi passaggi logici concludevano la dimostrazione. Per la prima volta in più di tre secoli la sfida di Fermat era stata vinta. Altri flash catturarono lo storico momento. Wiles scrisse l'enunciato dell'Ultimo Teorema di Fermat, si girò verso il pubblico e disse con modestia: «Penso di fermarmi qui».

Duecento matematici applaudirono, festeggiandolo. Anche coloro che avevano intuito in anticipo il risultato sorrisero increduli. Dopo tre decenni Andrew Wiles credeva di aver realizzato il suo sogno e dopo sette anni di isolamento poteva rivelare i suoi calcoli segreti. Tuttavia, mentre il Newton Institute era pervaso da un clima di euforia, il dramma stava per scatenarsi. Mentre Wiles assaporava quegli attimi di trionfo, lui, come chiunque altro nella sala, era inconsapevole delle terribili delusioni imminenti.

2
IL CREATORE DI ENIGMI

> «Sai», confidò il diavolo, «che neppure i migliori matematici negli altri pianeti, che sono tutti molto più progrediti del vostro, l'hanno risolto? Su Saturno c'è un tipo - assomiglia a un fungo su un paio di trampoli - che risolve le equazioni differenziali alle derivate parziali a memoria e anche lui ha rinunciato.»
>
> Arthur Poges, *Il Diavolo e Simon Flagg*

Pierre de Fermat nacque il 20 agosto 1601 nella città di Beaumont-de-Lomagne nel sudovest della Francia. Il padre di Fermat, Dominique, era un ricco mercante di pellami e così Pierre ebbe la fortuna di godere di un'educazione privilegiata al monastero francescano di Grandselve, cui seguì un periodo all'Università di Tolosa. Non ci sono documenti che attestino il genio matematico del giovane Fermat.

Le pressioni familiari lo spinsero verso la carriera giudiziaria e nel 1631 venne nominato consigliere al Parlamento di Tolosa, che era una Camera delle Petizioni. Se le popolazioni locali volevano rivolgere una petizione al re su qualunque materia dovevano prima convincere Fermat o qualche altro suo collega dell'importanza della loro richiesta. I consiglieri di questi Parlamenti locali rappresentavano il legame vitale fra la provincia e Parigi. Ma oltre a tenere i rapporti tra le popolazioni locali e il monarca, i consiglieri si occupavano che i regi decreti, emanati nella capitale, fossero attuati nelle regioni. Fermat era un solerte funzionario pubblico che, in base a tutti i resoconti, espletava le sue mansioni in maniera scrupolosa, ma clemente.

Tra i suoi incarichi vi erano anche quelli di giudice ed egli era abbastanza anziano da occuparsi dei processi più gravi. Un resoconto interessante della sua attività è fornito dal matematico inglese sir Kenelm Digby. Digby aveva chiesto di incontrare Fermat, ma in una lettera a un amico comune, il matematico John Wallis, rivela che il francese era stato occupato in pressanti affari giudiziari e perciò non aveva potuto incontrarlo.

> In verità sono arrivato proprio nella data del trasferimento dei giudici di Castres a Tolosa, dove lui [Fermat] è Giudice Supremo della Corte Sovrana del Parlamento; e da allora è stato occupato in processi di grande importanza, nei quali ha finito per emanare una sentenza che ha suscitato grande commozione; riguardava la condanna al rogo di un prete che aveva abusato delle sue funzioni. Il caso si è appena concluso e l'esecuzione è avvenuta.

Fermat intratteneva regolare corrispondenza con Digby e Wallis. Più oltre vedremo che spesso le lettere non erano amichevoli, ma esse ci offrono la possibilità di conoscere la vita quotidiana di Fermat e la sua attività scientifica.

Fermat fece una rapida carriera nella pubblica amministrazione e divenne membro dell'elite sociale, con il privilegio di usare il de come parte del cognome. La sua ascesa ai ranghi più alti non fu necessariamente il risultato della sua ambizione, quanto della sua salute. In Europa infuriava la peste e i sopravvissuti vennero subito elevati di rango per sostituire i morti nelle cariche lasciate vacanti. Anche Fermat si ammalò di peste nel 1652 e le sue condizioni divennero così gravi che l'amico Bernard Medon annunciò la sua morte a diversi colleghi. Poco dopo si corresse, come attesta una sua comunicazione all'olandese Nicholas Heinsius:

> Ti ho informato in precedenza della morte di Fermat. È ancora vivo e non abbiamo più timori per la sua salute, anche se poco tempo fa l'abbiamo dato per morto. La peste non infuria più in questa regione.

Oltre ai rischi per la salute, che si correvano nella Francia del diciassettesimo secolo, Fermat doveva sopravvivere a pericoli di natura politica. La sua nomina al Parlamento di Tolosa avvenne appena tre anni dopo che il cardinale Richelieu era stato nominato primo ministro. Era un'epoca di trame e intrighi e chiunque fosse coinvolto nella gestione dello stato, persino al livello di governo locale, doveva stare molto attento a non farsi immischiare nelle macchinazioni del cardinale. Fermat adottò la strategia di svolgere le sue mansioni in maniera efficiente senza attirare l'attenzione su di sé. Non aveva ambizioni politiche e faceva del suo meglio per evitare le lotte parlamentari. Impegnò invece tutte le energie residue alla matematica e, quando non doveva condannare a morte qualche prete, si dedicava al suo passatempo preferito. Fermat non era un accademico, ma un autentico cultore della matematica, un uomo che E.T. Bell definì il «Principe dei dilettanti». Ma il suo talento era tale che quando Julian Coolidge scrisse *Mathematics of Great Amateurs*, escluse Fermat dalla sua narrazione in base al principio che era «davvero così grande da dover essere considerato un professionista».

All'inizio del diciassettesimo secolo la matematica si stava ancora riprendendo dall'età buia del Medioevo e non godeva di alta considerazione. Di conseguenza i matematici non erano trattati con grande rispetto e la maggior parte di loro doveva autofinanziare i propri studi. Per esempio, Galileo non poteva studiare matematica all'Università di Pisa e fu costretto a ricorrere a lezioni private. La sola istituzione in Europa a promuovere attivamente lo studio della matematica era l'Università di Oxford, che aveva istituito la Cattedra Saviliana di Geometria nel 1619. Dire che la maggior parte dei matematici del Seicento fosse composta di dilettanti corrisponde al vero, ma Fermat era un caso estremo. Abitando lontano da Parigi era isolato dalla piccola comunità di matematici allora esistente, che includeva figure come Pascal, Gassendi, Roberval, Beaugrand e, soprattutto, padre Marino Mersenne.

Padre Mersenne diede solo qualche contributo minore alla teoria dei numeri e tuttavia giocò nella matematica seicentesca un ruolo che può a ragione essere

considerato più importante di quello dei suoi colleghi più stimati. Dopo essere entrato nell'ordine dei Minimi nel 1611, Mersenne studiò matematica e la insegnò agli altri frati e alle suore del convento dei Minimi di Nevers. Otto anni dopo si trasferì a Parigi nel monastero dell'Annunziata, vicino a Place Royale, dove gli intellettuali amavano trovarsi. Inevitabilmente Mersenne finì con l'incontrare gli altri matematici parigini, ma fu rattristato dalla loro riluttanza a comunicare tra di loro e con lui.

La tradizione di segretezza dei matematici parigini discendeva dai «cossisti» del sedicesimo secolo. I cossisti erano esperti in calcoli di ogni tipo ed erano impiegati dai mercanti e dagli uomini d'affari per risolvere complessi problemi di contabilità. Il loro nome deriva dalla parola italiana «cosa», perché essi usavano simboli per rappresentare quantità sconosciute, in modo analogo all'uso odierno della x da parte dei matematici. In quell'epoca tutti coloro che per mestiere risolvevano problemi matematici inventavano ingegnosi metodi personali per effettuare i calcoli e facevano di tutto per tenerli segreti allo scopo di conservare la reputazione di essere i soli in grado di risolvere un problema particolare. In un'occasione eccezionale Niccolò Tartaglia, che aveva trovato un metodo per risolvere velocemente le equazioni cubiche, rivelò la sua scoperta a Girolamo Cardano imponendogli sotto giuramento di mantenere il segreto più assoluto. Dieci anni dopo Cardano ruppe il giuramento e pubblicò il metodo di Tartaglia nella sua Ars Magna, un'azione che Tartaglia non gli perdonò mai. I rapporti tra i due si interruppero e ne seguì un'aspra disputa pubblica che servì soltanto a indurre altri matematici a tenere celati i propri segreti. La tradizione di segretezza dei matematici è proseguita fino alla fine dell'Ottocento e, come vedremo in seguito, persino nel ventesimo secolo ci sono esempi di geni matematici che hanno lavorato in segreto.

Quando padre Mersenne arrivò a Parigi era deciso a combattere contro il costume della segretezza e cercò di incoraggiare i matematici a scambiarsi idee e a lavorare con spirito di collaborazione. Padre Mersenne organizzò incontri regolari e il suo gruppo diventò in seguito il nucleo dell'Accademia di Francia. Se qualcuno si rifiutava di partecipare alle riunioni, Mersenne comunicava ai presenti tutto ciò che egli conosceva circa l'attività scientifica della persona assente, rivelando il contenuto di lettere e di memorie, anche se gli erano state inviate in via confidenziale. Per un uomo di chiesa non era un comportamento eticamente accettabile, ma Mersenne si giustificava in base al principio che lo scambio di informazioni sarebbe stato di beneficio per la matematica e per l'umanità. Queste indiscrezioni ovviamente provocarono aspri conflitti fra il ben intenzionato frate e le taciturne prime donne e portarono infine alla rottura dei rapporti con Descartes, risalenti agli studi comuni al Collegio dei Gesuiti di La Flèche. Mersenne aveva rivelato scritti filosofici di Descartes che avrebbero potuto offendere la chiesa, ma va aggiunto a suo onore che egli difese Descartes dagli attacchi teologici, come aveva fatto precedentemente nel caso di indexGalilei, Galileo Galileo. In un'epoca dominata dalla religione e dalla magia Mersenne si levò in difesa del pensiero razionale.

Mersenne viaggiò per tutta la Francia e oltre, allo scopo di diffondere informazioni sulle scoperte più recenti. Nei suoi viaggi incontrò Pierre de Fermat e sembra essere stato l'unico matematico con il quale quest'ultimo manteneva contatti regolari. L'influenza di Mersenne su questo Principe dei dilettanti deve essere stata seconda

solo a quella dell' *Arithmetica*, un trattato che Fermat aveva sempre con sé. Anche quando non poteva viaggiare, Mersenne manteneva i suoi rapporti con Fermat e con gli altri dotti scrivendo loro in continuazione. Dopo la sua morte, la stanza di Mersenne fu trovata piena zeppa di lettere scritte da settantotto diversi corrispondenti.

Nonostante le esortazioni di padre Mersenne, Fermat rifiutò fermamente di rivelare le sue dimostrazioni. Non dava alcuna importanza alle pubblicazioni e al riconoscimento del proprio valore da parte degli altri dotti e si contentava del semplice piacere di saper creare nuovi teoremi indisturbato. Tuttavia, questo genio timido e ritirato aveva un tratto birichino, il quale, abbinato alla sua riservatezza, significava che talvolta egli comunicava con gli altri matematici solo per provocarli. Fermat scriveva lettere che enunciavano il suo più recente teorema senza fornire la relativa dimostrazione. Poi sfidava i contemporanei a trovarla. Il fatto che non rivelasse mai le sue prove causò grande frustrazione. René Descartes definì Fermat uno «sbruffone» e l'inglese John Wallis si riferiva a lui chiamandolo «quel maledetto francese». Purtroppo per gli inglesi, Fermat si divertiva parecchio a giocare con i suoi cugini d'Oltremanica.

L'abitudine di Fermat di presentare un problema nascondendo la soluzione, oltre a procurargli la soddisfazione di infastidire i colleghi, aveva motivi più pratici. Anzitutto significava che non doveva sprecare tempo a sviluppare dettagliatamente i propri metodi e poteva procedere rapidamente verso nuove conquiste. Inoltre non doveva soffrire critiche meschine frutto della gelosia. Ogni prova, una volta pubblicata, sarebbe stata esaminata e discussa da chiunque sapesse qualcosa dell'argomento. Quando Blaise Pascal lo esortò a pubblicare qualche suo lavoro, il solitario Fermat replicò: «Qualunque mia opera sia giudicata degna di pubblicazione, non voglio che vi compaia il mio nome». Fermat era il genio solitario che sacrificava la fama per non essere distratto dalle meschine interrogazioni dei critici.

Lo scambio di lettere con Pascal, la sola occasione in cui Fermat discusse le proprie idee con qualcuno che non fosse Mersenne, riguardò la creazione di una branca affatto nuova della matematica: la teoria della probabilità. L'eremita Fermat era stato introdotto a questa materia da Pascal e perciò, nonostante il desiderio di isolamento, si sentì obbligato a discutere le proprie idee e a mantenere il dialogo. Fermat e Pascal insieme scoprirono le prime dimostrazioni e modellarono le prime ferree certezze nella teoria della probabilità, una materia intrinsecamente incerta. L'interesse di Pascal per la materia era stato suscitato da un professionista parigino del gioco d'azzardo, Antoine Gombaud, cavaliere di Méré, che aveva sollevato un problema riguardante un gioco d'azzardo chiamato *punti*. Il gioco consisteva nel vincere dei punti lanciando i dadi e il giocatore che guadagnava un certo numero di punti risultava vincitore e prendeva i soldi come premio.

Gombaud stava giocando a punti con un compagno quando un impegno urgente li costrinse ad abbandonare la partita a metà. Si presentò allora il problema su cosa fare del premio in denaro. La soluzione più semplice sarebbe stata di dare tutti i soldi al giocatore che aveva totalizzato più punti al momento dell'interruzione, ma Gombaud chiese a Pascal se c'era un modo più equo di dividere la somma. A Pascal fu chiesto di calcolare la probabilità di vittoria di ciascun giocatore se il gioco fosse proseguito e assumendo che entrambi i giocatori avessero avuto una probabilità identica di

vincere i punti successivi. La somma avrebbe potuto quindi essere spartita secondo questo calcolo delle probabilità.

Prima del diciassettesimo secolo le leggi della probabilità erano definite dall'intuizione e dall'esperienza dei giocatori d'azzardo, ma Pascal iniziò uno scambio di lettere con Fermat con lo scopo di scoprire le regole matematiche che descrivono più precisamente le leggi del caso. Tre secoli più tardi Bertrand Russell avrebbe così commentato questo apparente ossimoro: «Come osiamo parlare di leggi dei caso? Non è forse il caso l'antitesi di ogni legge?».

I due francesi analizzarono il problema posto da Gombaud e ben presto si resero conto che era relativamente banale, e che poteva essere risolto definendo rigorosamente tutti i potenziali risultati del gioco e assegnando a ciascuno di essi una probabilità individuale. Sia Pascal sia Fermat erano in grado di risolvere indipendentemente il problema di Gombaud, ma la loro collaborazione accelerò la scoperta di una soluzione e li condusse a un'esplorazione più profonda di altre più sottili e sofisticate questioni relative alla teoria della probabilità.

I problemi di probabilità sono talvolta controversi perché la risposta matematica, la vera risposta, è spesso contraria a ciò che potrebbe suggerire l'intuizione. Questo fallimento dell'intuizione è sorprendente perché «la sopravvivenza del più adatto» dovrebbe fornire una forte pressione evolutiva in favore di un cervello naturalmente capace di analizzare questioni di probabilità. Potete immaginare i nostri antenati che danno la caccia a un giovane cervo e valutano se attaccarlo oppure no. Qual è il rischio che un maschio adulto si trovi nei pressi, pronto a difendere la prole e ad aggredire l'assalitore? D'altro canto, qual è la probabilità che si presenti un pasto migliore se si rinuncia a quello presente, giudicando troppo rischiosa la cattura della preda? Il talento di analizzare le probabilità dovrebbe far parte del nostro patrimonio genetico e tuttavia spesso il nostro intuito si rivela fuorviante.

Uno dei problemi di calcolo delle probabilità che più contrastano con la percezione intuitiva è la probabilità di avere in comune con altri la data di compleanno. Immaginate un campo di calcio dove ci sono 23 persone, i giocatori più l'arbitro. Qual è la probabilità che due di queste 23 persone abbiano il compleanno in comune? Con 23 individui su 365 giorni da scegliere, sembra improbabile che qualcuno abbia lo stesso giorno di compleanno. Se si chiede di calcolare una percentuale, molti ipotizzano una probabilità al massimo del 10 per cento. In realtà la risposta esatta è appena sopra il 50 per cento, cioè è più probabile che ci siano due persone sul campo di gioco con la stessa data di compleanno piuttosto che il contrario.

La ragione di quest'alta probabilità è che più del numero delle persone coinvolte conta il numero dei possibili abbinamenti tra le persone. Quando consideriamo l'idea di un compleanno in comune, dobbiamo calcolare non gli individui singoli, ma le coppie. Anche se sul terreno di gioco ci sono solo 23 persone, le coppie possibili sono ben 253. Per esempio, il primo giocatore può essere abbinato con ognuno degli altri 22 individui, dando così luogo a 22 accoppiamenti di partenza. Poi il secondo giocatore può essere abbinato con ognuno dei restanti 21 individui (abbiamo già contato l'abbinamento tra il primo e il secondo giocatore e perciò il numero dei possibili abbinamenti si riduce di uno), dando luogo ad altri 21 abbinamenti. Poi il

terzo giocatore può essere abbinato a ognuno dei restanti 20 individui, creando altre 20 coppie, e così via fino a raggiungere un totale di 253 coppie possibili.

Il fatto che la probabilità di un compleanno in comune entro un gruppo di 23 persone sia superiore al 50 per cento sembra intuitivamente sbagliato, ma è matematicamente innegabile. Strane probabilità di questo tipo sono esattamente quelle su cui contano gli scommettitori e i giocatori d'azzardo per approfittare degli sprovveduti. La prossima volta che vi trovate in una festa con più di 23 persone, potreste scommettere che due persone tra i presenti hanno il compleanno nello stesso giorno. Notate che con un gruppo di 23 persone la probabilità è di poco sopra il 50 per cento, ma cresce rapidamente quando il gruppo aumenta di numero. Perciò, con un gruppo di 30 persone vale certamente la pena di scommettere che due di loro compiono gli anni nello stesso giorno.

Fermat e Pascal scoprirono le regole essenziali che presiedono a tutti i giochi d'azzardo e che possono essere usate dagli scommettitori per definire le migliori strategie di gioco. Inoltre le leggi della probabilità hanno trovato applicazione in una vasta gamma di situazioni che va dalle speculazioni in borsa alla stima della probabilità di un incidente nucleare. Pascal era persino convinto di poter usare le proprie teorie per giustificare la credenza in Dio. Egli affermava che «l'eccitamento che un giocatore d'azzardo prova quando fa una scommessa è pari alla somma che potrebbe vincere moltiplicata per le probabilità di vincerla». Sosteneva poi che il possibile premio della felicità eterna ha un valore infinito e che la probabilità di entrare in paradiso conducendo una vita virtuosa, per quanto possa essere piccola, è certamente una quantità finita. Perciò, secondo la definizione di Pascal, la religione era un gioco di eccitazione infinita che valeva la pena di praticare, perché moltiplicare un premio infinito per una probabilità finita dà un risultato infinito.

Oltre a condividere la paternità della teoria della probabilità, Fermat lavorò a istituire un'altra area della matematica, quella del calcolo differenziale. Il calcolo differenziale è la capacità di calcolare il tasso di variazione, o derivata, di una quantità rispetto a un'altra. Per esempio, il tasso di variazione della distanza in rapporto al tempo è meglio noto semplicemente come velocità. Per i matematici le quantità tendono a essere astratte e intangibili, ma le conseguenze del lavoro di Fermat dovevano rivoluzionare la scienza. La matematica di Fermat ha permesso agli scienziati di capire meglio il concetto di velocità e la sua relazione ad altre quantità fondamentali come l'accelerazione, ossia il tasso di variazione della velocità rispetto al tempo.

Per secoli si è pensato che Isaac Newton avesse scoperto il calcolo differenziale autonomamente e senza conoscere l'opera di Fermat, ma nel 1934 il professor Louis Trenchard Moore scoprì un appunto che rimetteva le cose al loro posto e dava a Fermat ciò che gli spetta. Newton scrisse di aver sviluppato il calcolo in base al «metodo del signor Fermat di ricavare le tangenti». Già nel diciassettesimo secolo il calcolo differenziale venne impiegato per descrivere la legge della gravità e le altre leggi della meccanica formulate da Newton, le quali mettono in relazione la distanza, la velocità e l'accelerazione.

La scoperta del calcolo differenziale e della teoria delle probabilità sarebbero più che sufficienti a guadagnare a Fermat un posto nel pantheon delle celebrità

matematiche, ma il suo risultato più grande fu in un altro settore della matematica. Mentre il calcolo differenziale è stato usato da allora per spedire i razzi sulla luna e mentre la teoria delle probabilità è stata impiegata per le stime di rischio dalle compagnie assicuratrici, il più grande amore -di Fermat fu per un tema di grande inutilità, la teoria dei numeri. Fermat era ossessionato dall'idea di capire le proprietà dei numeri e i loro rapporti. Questa è la forma più pura e antica della matematica e Fermat lavorò su un corpo di conoscenze che derivava da Pitagora.

L'evoluzione della teoria dei numeri

Dopo la morte di Pitagora il concetto di dimostrazione matematica si diffuse rapidamente attraverso il mondo civilizzato e due secoli dopo che la sua scuola era stata bruciata e rasa al suolo, il centro degli studi matematici si era spostato da Crotone alla città di Alessandria. Nel 332 a.C. dopo aver conquistato la Grecia, l'Asia Minore e l'Egitto, Alessandro Magno decise che avrebbe costruito una capitale che sarebbe stata la città più splendida del mondo. Alessandria fu davvero una metropoli spettacolosa, ma non diventò subito un centro di sapere. Fu solo con la morte di Alessandro e con l'ascesa al trono egiziano di Tolomeo I che Alessandria divenne la sede della prima università del mondo. Matematici e altri intellettuali convennero nella città di Tolomeo, attratti dalla fama dell'università, ma soprattutto dalla Biblioteca Alessandrina.

La Biblioteca era stata un'idea di Demetrio di Falero, un oratore costretto a fuggire da Atene e che alla fine aveva trovato rifugio ad Alessandria. Egli persuase Tolomeo a raccogliere tutti i grandi libri, assicurandogli che le grandi menti sarebbero venute di conseguenza. Dopo che furono radunati i tomi trovati in Egitto e in Grecia, agenti del re percorsero l'Europa e l'Asia Minore alla ricerca di altri volumi. Persino chi si recava ad Alessandria in viaggio di piacere non poteva sfuggire all'appetito vorace della Biblioteca. All'ingresso in città, i volumi in possesso dei visitatori venivano confiscati e portati agli scribi. I libri venivano copiati cosicché l'originale potesse essere donato alla Biblioteca e il possessore potesse ricevere un duplicato. Questo meticoloso servizio di duplicazione per i viaggiatori che si recavano ad Alessandria fa sperare allo storico di oggi che una copia di un grande testo perduto salti fuori un giorno o l'altro in una soffitta in qualche parte del mondo. Nel 1906 J.L. Heiberg scoprì a Costantinopoli un manoscritto del genere, *Il Metodo*, che conteneva alcuni scritti originali di Archimede.

Il sogno di Tolomeo di costruire una biblioteca dove fosse depositato tutto il sapere sopravvisse alla sua morte, e dopo l'ascesa al trono dei Tolomei suoi successori la Biblioteca giunse a contenere più di seicentomila libri. Studiando ad Alessandria i matematici potevano apprendere tutto quello che era allora conosciuto e avevano come insegnanti i dotti più famosi. Il fondatore della scuola matematica di Alessandria fu il grande Euclide.

Euclide nacque circa nel 330 a.C. Come Pitagora, Euclide credeva nella ricerca della verità matematica fine a se stessa e non rivolgeva il proprio lavoro ad applicazioni pratiche. Un aneddoto ci racconta di uno studente che interrogò Euclide

sull'utilità della matematica che stava imparando. Dopo aver completato la lezione, Euclide si rivolse al suo schiavo e gli disse: «Dai una moneta a quel ragazzo che desidera ricavare un profitto da tutto ciò che impara». Dopo di che lo studente fu espulso.

Euclide dedicò gran parte della vita alla stesura degli *Elementi*, il manuale che ha avuto più successo nella storia. Fino al nostro secolo era anche stato il libro più diffuso nel mondo dopo la Bibbia. Gli *Elementi* sono composti di tredici libri, alcuni dei quali espongono l'opera di Euclide, mentre i restanti sono una compilazione di tutto il sapere matematico dell'epoca, compresi due volumi interamente dedicati alle opere del Sodalizio pitagorico. Nei secoli successivi alla morte di Pitagora i matematici avevano inventato una varietà di tecniche logiche che potevano essere applicate in diverse circostanze e Euclide le impiegò abilmente tutte negli *Elementi*. In particolare Euclide era molto incline a sfruttare un'arma logica conosciuta come *reductio ad absurdum* o dimostrazione per assurdo. Questa impostazione si impernia sull'idea perversa di cercare di dimostrare che un teorema è vero, assumendo inizialmente che sia falso. Il matematico indaga le conseguenze logiche dell'assunto che il teorema sia falso. A un certo punto nella catena dei passaggi logici sorge una contraddizione (ad esempio: 2 + 2 = 5). In matematica la contraddizione è inaccettabile e dunque il teorema iniziale non può essere falso, perciò dev'essere vero.

Il matematico inglese G.H. Hardy riassunse così lo spirito della dimostrazione per assurdo nel suo libro *Apologia di un matematico*: «La *reductio ad absurdum*, tanto amata da Euclide, è una delle più belle armi di un matematico. È un gambetto molto più raffinato di qualsiasi gambetto degli scacchi: un giocatore di scacchi può offrire in sacrificio un pedone o anche qualche altro pezzo, ma il matematico offre la partita».

Una delle più famose dimostrazioni per assurdo proposta da Euclide stabiliva l'esistenza dei cosiddetti *numeri irrazionali*. Si sospettava che i numeri irrazionali fossero stati in origine scoperti dai pitagorici molti secoli prima, ma il concetto era così inaccettabile per Pitagora che egli ne negò l'esistenza.

Quando Pitagora affermava che l'universo è governato dai numeri, si riferiva ai numeri interi e ai rapporti (o *rationes*) fra numeri interi, cioè alle frazioni. I numeri interi e i numeri frazionari sono noti come numeri razionali. Un numero irrazionale, ed è questo l'aspetto che appariva orribile a Pitagora, è un numero che non è né intero né frazionario. Infatti i numeri irrazionali sono così strani da non poter essere scritti in termini decimali, neppure in termini di decimali periodici. Un decimale periodico come 0,111111... è ancora un numero abbastanza semplice ed equivale alla frazione 1/9. Il fatto che il numero 1 si ripete per sempre significa che il decimale ha una struttura molto semplice e regolare. Questa regolarità, nonostante continui all'infinito, comporta che il decimale possa essere riscritto in termini frazionari. Se invece cercate di esprimere un numero irrazionale in forma decimale finirete per avere un numero che continua per sempre senza una struttura regolare o coerente.

Il concetto di numero irrazionale fu una novità terribile. I matematici stavano guardando oltre i numeri interi e quelli frazionari ai quali erano abituati e ne stavano

scoprendo o forse inventando di nuovi. Il matematico ottocentesco Leopold Kronecker disse: «Dio ha creato i numeri interi; tutto il resto è opera dell'uomo».

Il più famoso numero irrazionale è π. A scuola talvolta lo si approssima con 3,14, ma il vero valore di π è più vicino a 3,14159265358979323846, ma anche questa cifra è soltanto un'approssimazione. Non si può mai scrivere esattamente il valore di π, perché i decimali proseguono all'infinito senza alcuno schema regolare. Una meravigliosa caratteristica di questo suo sviluppo casuale è che lo si può calcolare con un'equazione che è estremamente regolare: $\sqrt{2}$

$$\pi = 4\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+...\right)$$

Calcolando solo i primi termini si può ottenere un valore molto approssimativo di π , ma calcolandone sempre di più l'approssimazione ottenuta si fa sempre più accurata. Anche se conoscere π fino a 39 cifre decimali è sufficiente per calcolare la circonferenza dell'universo con un margine di errore pari soltanto al raggio di un atomo di idrogeno, questo non ha trattenuto gli scienziati dal calcolare con il computer π fino al maggior numero possibile di decimali. Il record attuale è detenuto da Yasumasa Kanada dell'Università di Tokyo che ha calcolato con il computer π fino a sei miliardi di decimali nel 1996. Recentemente si è sparsa la voce che i fratelli russi Chudnovsky a New York avessero calcolato π fino a otto miliardi di decimali e che intendessero raggiungere il trilione. E da osservare che se Kanada o i fratelli - Chudnovsky proseguissero i loro calcoli finché i loro computer esaurissero tutta l'energia dell'universo, non potrebbero comunque stabilire il valore esatto di π. È facile capire perché Pitagora abbia tramato per nascondere l'esistenza di questo mostro matematico.

Il valore di π fino a 1500 cifre decimali

3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172535940812848111745028410270193852105559644622948954930381964428810975665933446128475648233786783165271201909145648566923460348610454326648213393607260249141273724587006606315588174881520920962829254091715364367892590360011330530548820466521384146951941511609433057270365759591953092186117381932611793105118548074462379962749567351885752724891227938183011949129833673362440656643086021394946395224737190702179860943702770539217176293176752384674818467669405132000568127145263560827785771342757789609173637Ì787214684409012249534301465495853710507922796892589235420199561121290219608S4034418159813629774771309960518707211349999998372978049951059731732816096318595024459455346908302642522308253344685035261931188171010003137838752886587533208381420617177669147303598253490428755468731159562863882353787593751957781

85778053217122680661300192787661119590921642019893809525
72010654858632788659361533818279682303019520353018529689
95773622599413891249721775283479131315574857242454150695
95082953311686172785588907509838175463746493931925506040
09277016711390098488240128583616035637076601047101819429
55596198946767837449448255379774726847104047534646208046
68425906949129331367702898915210475216205696602405803815
01935112533824300355876402474964732639141992726042699227
96782354781636009341721641219924586315030286182974555706
74983850549458858692699569092721079750930295532116534498
72027559602364806654911988183479775356636980742654252786
25518184175746728909777727938000816470200161452491921732
17214772350141441973 5

Quando Euclide osò affrontare il tema dell'irrazionalità nel decimo volume degli *Elementi*, lo scopo era di dimostrare che poteva esserci un numero che non poteva mai essere scritto in termini frazionari. Invece di cercare di provare che π è irrazionale, Euclide esaminò la radice quadrata di 2, $\sqrt{2}$, ossia quel numero che, moltiplicato per se stesso, è uguale a 2. Per dimostrare che $\sqrt{2}$ non poteva essere scritta come una frazione, Euclide usò la reductio ad absurdum e iniziò assumendo che si potesse scrivere $\sqrt{2}$ come una frazione. Dimostrò poi che questa ipotetica frazione poteva sempre essere semplificata. La semplificazione di una frazione significa, ad esempio, che la frazione 8/12 può essere semplificata in 4/6 dividendo numeratore e denominatore per due. A sua volta 4/6 può essere semplificato in 2/3, che non può essere semplificato ulteriormente e pertanto si dice che la frazione è ridotta nella sua forma più semplice. Ma Euclide dimostrò che la frazione ipotetica che doveva rappresentare $\sqrt{2}$ poteva essere semplificata un numero infinito di volte senza mai essere ridotta alla sua forma più semplice. Questo è assurdo, perché tutte le frazioni devono alla fine avere una forma semplice; dunque la frazione in ipotesi non può esistere. Pertanto $\sqrt{2}$ non può essere scritto in termini frazionari ed è un numero irrazionale. Nell'appendice 2 si dà un'esposizione della dimostrazione di Euclide.

Usando la dimostrazione per assurdo Euclide potè dimostrare l'esistenza dei numeri irrazionali. Per la prima volta i numeri avevano assunto una qualità nuova e più astratta. Fino a quel momento nella storia tutti i numeri potevano essere espressi come numeri interi o frazionari, ma i numeri irrazionali di Euclide sfidavano la rappresentazione tradizionale. Non c'è altro modo di descrivere il numero equivalente alla radice quadrata di due che non sia di esprimerlo attraverso il simbolo $\sqrt{2}$, perché non può essere scritto come frazione e ogni tentativo di scriverlo in forma decimale può soltanto essere un'approssimazione, ossia 1,414213562373...

Per Pitagora, la bellezza della matematica era l'idea che i numeri razionali (interi e frazionari) potessero spiegare tutti i fenomeni naturali. Questo orientamento filosofico rese Pitagora cieco dinanzi all'esistenza dei numeri irrazionali e forse determinò l'esecuzione di uno dei suoi allievi. Secondo un aneddoto sembra che un giovane studente di nome Ippaso stesse trastullandosi oziosamente con la radice

quadrata di 2, nel tentativo di trovare la frazione equivalente. Alla fine si rese conto che tale frazione non esisteva, ossia che $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale. Ippaso deve essere stato felicissimo della scoperta, ma non altrettanto lo fu il suo maestro. Pitagora aveva definito l'universo in termini di numeri razionali e l'esistenza dei numeri irrazionali metteva in dubbio il suo ideale. La conseguenza dell'intelligente osservazione di Ippaso avrebbe dovuto essere un periodo di discussione e di meditazione durante il quale Pitagora avrebbe dovuto accettare questa nuova sorgente di numeri. Pitagora non era però disposto ad ammettere di aver sbagliato, ma allo stesso tempo era incapace di distruggere l'argomentazione di Ippaso con la forza della logica. Allora decise di condannare a morte Ippaso per annegamento e questa decisione va a sua eterna vergogna.

Il padre della logica e del metodo matematico era ricorso alla forza piuttosto di ammettere di aver sbagliato. La negazione dei numeri irrazionali da parte di Pitagora è la sua azione più sciagurata ed è forse la tragedia maggiore della matematica greca. Fu solo dopo la sua morte che i numeri irrazionali poterono essere risuscitati senza paura.

Anche se Euclide era chiaramente interessato alla teoria 1 dei numeri, non fu questo il suo maggiore contributo alla I matematica. La vera passione di Euclide era la geometria e I dei tredici libri che compongono gli *Elementi* i libri dal I al VI espongono la geometria delle superfici piane o a due dimensioni, mentre i libri dall'XI al XIII trattano la geometria dei solidi, ossia delle figure a tre dimensioni. Gli *Elementi* contengono un corpo dottrinario così completo che per duemila anni furono il manuale di geometria nelle scuole e nelle università.

Il matematico che compilò un testo di eguale valore per la teoria dei numeri fu Diofanto di Alessandria, l'ultimo campione della tradizione matematica greca. Anche se le acquisizioni di Diofanto nella teoria dei numeri sono ben documentate nei suoi libri, di questo formidabile matematico non si sa quasi nient'altro. Il suo luogo di nascita è sconosciuto e la sua presenza ad Alessandria non è collocabile con precisione se non nell'arco di cinque secoli. Nei suoi scritti Diofanto cita Ipsicle e dunque dev'essere vissuto dopo il 150 a.C; d'altro lato la sua opera è citata da Teone di Alessandria e perciò Diofanto dev'essere vissuto prima del 364 d.C. In genere si accetta la data del 250 d.C. come la più probabile. Opportunamente per un risolutore di problemi com'egli fu, l'unico particolare della vita di Diofanto che è sopravvissuto ha la forma di un enigma che si dice sia stato scolpito sulla sua tomba:

> Dio gli consentì di essere ragazzo per la sesta parte della sua vita e, con l'aggiunta di una dodicesima parte, gli rivestì le guance di peluria. Dopo un'altra settima parte della sua vita il Dio accese per lui le fiaccole nuziali e cinque anni dopo il matrimonio gli accordò un figlio. Ahimé! povero figlio nato troppo tardi; dopo aver raggiunto la metà dell'intera vita di suo padre, il gelido Fato se lo prese. Dopo essersi consolato con la scienza dei numeri per altri quattro anni, egli concluse la sua vita.

Il problema consiste nel calcolare la durata della vita di Diofanto. La risposta si trova nell'appendice 3.

L'enigma è un esempio del tipo di problemi che deliziavano Diofanto. La sua specialità era di affrontare quesiti che richiedevano una soluzione con numeri interi e oggi ci si riferisce a tali problemi definendoli problemi diofantei. Trascorse la sua carriera ad Alessandria, raccogliendo problemi già risolti e inventandone di nuovi, per poi compendiarli tutti nel suo trattato più importante, l' *Arithmetica*. Dei tredici libri che la compongono, solo sei sopravvissero alle calamità del Medioevo e giunsero a ispirare i matematici del Rinascimento, compreso Pierre de Fermat. Gli altri sette libri si perdettero in una serie di tragici eventi che fecero tornare indietro la matematica all'età dei babilonesi.

Durante i secoli che separarono Euclide da Diofanto, Alessandria rimase la capitale intellettuale del mondo civilizzato, ma per tutto questo periodo la città fu ripetutamente minacciata da eserciti stranieri. Il primo grande assalto si ebbe nel 47 a.C. quando Giulio Cesare cercò di abbattere il regno di Cleopatra incendiando la flotta di Alessandria. La Biblioteca, che si trovava vicino al porto, prese fuoco anch'essa e centinaia di migliaia di volumi furono distrutti. Fortunatamente per i matematici Cleopatra apprezzava l'importanza del sapere ed era decisa a riportare la Biblioteca al suo antico splendore. Marco Antonio si rese conto che la via per conquistare il cuore di una donna colta passava attraverso la sua biblioteca e perciò marciò sulla città di Pergamo. A Pergamo era stata fondata una biblioteca che ambiva a costituire la migliore collezione di volumi del mondo, ma Marco Antonio trasportò tutto il fondo di Pergamo in Egitto, ripristinando il primato di Alessandria.

Nei quattro secoli successivi la Biblioteca continuò ad accumulare libri finché nel 389 d.C. ricevette il primo di due colpi mortali, entrambi dovuti al fanatismo religioso. L'imperatore cristiano Teodosio ordinò a Teofilo, vescovo di Alessandria, di distruggere tutti i monumenti pagani. Sfortunatamente, quando Cleopatra aveva ricostruito la Biblioteca, aveva deciso di alloggiarla nel Tempio di Serapide e così la Biblioteca venne coinvolta nella distruzione delle immagini e degli altari pagani. I dotti pagani cercarono disperatamente di salvare sei secoli di conoscenze, ma prima di poter fare qualunque cosa furono massacrati dalla plebaglia cristiana. La discesa nell'età buia del Medioevo era cominciata.

Poche copie preziose dei volumi più importanti sopravvissero alla devastazione e alla strage perpetrate dai cristiani e i dotti continuarono a visitare Alessandria alla ricerca del sapere. Poi nel 642 un attacco mussulmano riuscì laddove i cristiani avevano fallito. Quando gli fu chiesto che cosa si dovesse fare della Biblioteca, il vittorioso califfo Omar ordinò che tutti i volumi contrari al Corano fossero distrutti e che quelli conformi al Corano fossero distrutti anch'essi, in quanto superflui. I manoscritti vennero utilizzati per alimentare le caldaie dei bagni pubblici e la matematica greca andò letteralmente in fumo. Non c'è da sorprendersi che la maggior parte dell'opera di Diofanto sia andata distrutta. È anzi un miracolo che sei libri dell' *Arithmetica* siano potuti sopravvivere alla tragedia di Alessandria.

Nei mille anni successivi la matematica in Occidente entrò in una fase di stagnazione e solo pochissimi luminari in India e in Arabia la tennero in vita. Essi copiarono le formule descritte nei manoscritti greci sopravvissuti e poi cominciarono a reinventare da soli molti teoremi che erano andati perduti. Aggiunsero anche nuovi elementi alla matematica, compreso il numero zero.

Nella matematica moderna lo zero assolve a due funzioni. Innanzitutto ci permette di distinguere tra numeri come 52 e 502. In un sistema dove la posizione del numero indica il suo valore, è necessario un simbolo che indichi una posizione vuota. Per esempio, 52 rappresenta 5 volte dieci più due volte uno, mentre 502 rappresenta cinque volte cento, più 0 volte dieci, più 2 volte uno e la presenza dello zero è fondamentale per dissipare ogni ambiguità. Anche i babilonesi tremila anni prima di Cristo apprezzavano l'utilità dello zero per evitare confusione e i greci adottarono la loro idea, adoperando un simbolo circolare simile a quello che usiamo oggi. Lo zero ha però un significato più profondo e sottile, che fu compreso pienamente soltanto parecchi secoli più tardi dai matematici indiani. Gli indù riconobbero che lo zero aveva un'esistenza indipendente al di là della mera funzione di separare gli altri numeri: ossia lo zero era un numero a pieno titolo. Esso rappresentava la quantità del nulla. Per la prima volta il concetto astratto del nulla aveva ricevuto una tangibile rappresentazione simbolica.

A un lettore moderno questo può sembrare un banale passo in avanti, ma il significato più profondo del simbolo zero è stato ignorato da tutti gli antichi filosofi greci, compreso Aristotele. Egli aveva sostenuto che il numero zero andava bandito, perché sconvolgeva la coerenza degli altri numeri: dividere per zero qualunque altro numero portava a un risultato incomprensibile. Già nel sesto secolo i matematici indiani non accantonavano più il problema in questo modo e il dotto Brahmagupta, vissuto nel settimo secolo, aveva una concezione della matematica abbastanza sofisticata da utilizzare la divisione per zero come una definizione dell' infinito.

Mentre l'Europa aveva abbandonato la nobile ricerca della verità, l'India e l'Arabia stavano consolidando il sapere sottratto alle macerie dell'incendio di Alessandria e lo reinterpretavano in un nuovo e più ricco linguaggio. Oltre ad aggiungere lo zero al vocabolario della matematica, sostituirono i primitivi simboli greci e gli ingombranti numeri romani con il sistema numerico oggi universalmente adottato. Anche questo potrebbe sembrare un piccolissimo passo in avanti, ma provate a moltiplicare CLV per DCI e vi renderete conto dell'importanza dell'innovazione. La moltiplicazione equivalente con i numeri arabi, ossia 155 per 601, è assai più semplice. La crescita di ogni disciplina dipende dalla capacità di comunicare e sviluppare le idee, e ciò richiede un linguaggio sufficientemente articolato e flessibile. Le idee di Pitagora e di Euclide non erano meno eleganti a motivo della loro goffa espressione, ma tradotte in simboli arabi erano destinate a fiorire e a produrre concetti più nuovi e più ricchi.

Nel decimo secolo il dotto francese Gerberto di Aurillac apprese il nuovo sistema di calcolo dai mori di Spagna e grazie alla sua posizione di insegnante nelle chiese e nelle scuole di tutta Europa potè introdurre il nuovo sistema in Occidente. Nel 999 Gerberto fu eletto papa e prese il nome di Silvestro II, una carica che gli consentì di promuovere ulteriormente l'adozione dei numeri indo-arabi. Anche se l'efficacia del nuovo sistema rivoluzionò la contabilità e fu adottata dai mercanti, ebbe scarso effetto nel suscitare una rinascita della matematica in Europa.

Il punto di svolta cruciale nella matematica occidentale avvenne nel 1453, quando i turchi saccheggiarono Costantinopoli. Nel corso dei secoli i manoscritti sopravvissuti alla devastazione di Alessandria erano finiti a Costantinopoli, ma ancora una volta

corsero il pericolo di essere distrutti. I dotti di Bisanzio fuggirono in Occidente con tutti i testi che poterono preservare. Sopravvissuti agli attacchi di Cesare, del vescovo Teofilo, del califfo Omar e infine dei turchi, i pochi preziosi volumi dell' *Arithmetica* tornarono in Occidente. Diofanto era destinato a finire sulla scrivania di Pierre de Fermat.

Nascita di un'enigma

Le responsabilità giudiziarie di Fermat occupavano gran parte del suo tempo, e il poco che rimaneva libero lo dedicava interamente alla matematica. Ciò si doveva in parte al fatto che nella Francia del diciassettesimo secolo i giudici venivano scoraggiati dall'intrattenere assidue relazioni sociali nella convinzione che se un giorno qualche loro amico o conoscente fosse stato processato, non avrebbero potuto assolvere il proprio ruolo con imparzialità. Fraternizzare troppo con la popolazione locale avrebbe solo condotto a forme di favoritismo. Isolato dal resto dell'alta società di Tolosa, Fermat poteva concentrarsi sulla sua attività.

Non ci sono notizie che Fermat sia stato ispirato da un insegnante di matematica; al contrario suo mentore fu una copia dell' *Arithmetica*. L'*Arithmetica* era un tentativo di descrivere la teoria dei numeri dell'epoca di Diofanto attraverso una serie di problemi e di soluzioni. In effetti Diofanto offriva a Fermat mille anni di sapere matematico. In un solo libro Fermat poteva trovare l'intera conoscenza dei numeri costruita da Pitagora, da Euclide e dai loro discepoli. La teoria Idei numeri non si era più sviluppata dopo il barbarico incendio di Alessandria, ma ora Fermat era pronto a riprendere lo studio della più fondamentale tra le discipline matematiche.

L'*Arithmetica* in possesso di Fermat era una traduzione latina condotta da Claude Gaspar Bachet de Méziriac, ritenuto l'uomo più dotto di tutta la Francia. Oltre a essere un intelligente studioso della lingua francese, un poeta e un cultore di studi classici, Bachet aveva una passione per i quesiti .matematici. La sua prima pubblicazione fu una raccolta di quesiti intitolata *Problèmes plaisants et délectable qui se font par les nombres*, che includeva problemi relativi all'attraversamento di un fiume, al travasamento di un liquido oltre a parecchi quesiti numerici. Una delle questioni poste riguardava i pesi:

> Qual è il minor numero di pesi che possono essere usati su una bilancia per pesare ogni numero intero di chilogrammi da 1 a 40?

Bachet aveva escogitato un'acuta soluzione che dimostra la possibilità di assolvere al compito con solo quattro pesi. La iua soluzione è riportata nell'appendice 4.

Anche se era soltanto un matematico dilettante, l'interesse di Bachet per i quesiti era sufficiente a fargli capire che i problemi elencati da Diofanto erano di rango più elevato e meritevoli di studio più approfondito. Egli si prefisse di tradurre l'opera di Diofanto e di pubblicarla, in modo che le tecniche dei greci potessero ricevere nuova vita. È importante rendersi conto che gran parte della conoscenza matematica antica era stata completamente dimenticata. La matematica superiore non era insegnata

neppure nelle maggiori università europee ed è solo grazie agli sforzi di studiosi come Bachet che essa rinacque rapidamente. Nel 1621, quando Bachet pubblicò la versione latina dell' *Arithmetica*, egli diede un contributo alla seconda età aurea della matematica.

L'*Arithmetica* contiene più di cento problemi e per ognuno Diofanto dà una soluzione dettagliata. Questa coscienziosa precisione non diventò mai un'abitudine di Fermat. Fermat non era interessato a scrivere libri di testo per le future generazioni, ma voleva semplicemente essere certo di aver risolto un problema. Mentre studiava i problemi e le soluzioni di Diofanto, Fermat era indotto a pensare e ad affrontare altre questioni più sottili, collegate alle prime. Fermat scribacchiava solo quello che gli serviva per essere certo di aver scorto la soluzione e poi non si preoccupava più di stendere per esteso il resto della dimostrazione. Nella maggior parte dei casi destinava al cestino i suoi scarabocchi illuminanti e poi passava subito al problema successivo. Per nostra fortuna l'edizione dell' *Arithmetica* di Bachet conteneva pagine con ampi margini sui quali, talvolta, Fermat annotava rapidi commenti e passaggi logici. Per generazioni di matematici queste note marginali sarebbero diventate un documento preziosissimo, per quanto scarno, dei più geniali calcoli di Fermat.

Una delle scoperte di Fermat riguardava i cosiddetti *numeri amicabili*, strettamente imparentati ai numeri perfetti che avevano affascinato Pitagora duemila anni prima. I numeri amicabili sono coppie di numeri tali che ogni numero è la somma dei divisori dell'altro numero. I pitagorici fecero la scoperta straordinaria che 220 e 284 erano numeri amicabili. I divisori di 220 sono 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 e la loro somma dà 284. D'altro canto i divisori di 284 sono 1, 2, 4, 71, 142 e la loro somma dà 220.

La coppia 220 e 284 fu definita il simbolo dell'amicizia. Nel libro di Martin Gardner *Show di magia matematica* si parla di talismani venduti nel Medioevo che recavano incisi questi due numeri nella convinzione che indossarli avrebbe suscitato l'amore. Un numerologo arabo attesta la pratica di incidere 220 su un frutto e 284 su un altro frutto, poi di mangiare il primo e di offrire il secondo a un'amante come afrodisiaco matematico. I primi teologi cristiani notarono che nella *Genesi* si dice che Giacobbe diede ad Esaù 220 capre. Essi ritenevano che il numero delle capre, che è la metà di una coppia di numeri amicabili, fosse espressione dell'amore di Giacobbe per Esaù.

Non furono identificati altri numeri amicabili fino al 1636, quando Fermat scoprì la coppia 17.296 e 18.416. Anche se non fu una scoperta profonda, dimostra la familiarità di Fermat con i numeri e il suo amore per i giochi numerici. Fermat fu preso dalla mania di trovare numeri amicabili; Descartes scoprì una terza coppia (9.363.584 e 9.437.056) ed Euler arrivò a elencare sessantadue coppie di numeri amicabili. Curiosamente tutti trascurarono una coppia di numeri amicabili assai più piccola. Nel 1866 un sedicenne, Nicolò Paganini, scoprì la coppia 1184 e 1210.

Durante il ventesimo secolo i matematici hanno ampliato l'idea e si sono messi alla ricerca dei cosiddetti numeri «socievoli», tre o più numeri che formano una sorta di cerchio. Per esempio con la tripletta o alternativamente coi cinque numeri sucessivi (1.945.330.728.960; 2.324.196.638.720; 2.615.631.953.920) oppure (12,496; 14,288;

15,472; 14,536; 14,264) se si sommano i divisori del primo numero si ottiene il secondo, se si sommano i divisori del secondo si ottiene il terzo, proseguendo con l'altro esempio, se si sommano i divisori del terzo si ottiene il quarto, se si sommano i divisori del quarto si ottiene il quinto e sommando i divisori del quinto si ottiene il primo. Il cerchio più ampio di numeri socievoli include ventotto numeri, il primo dei quali è 14.316.

Anche se scoprire una nuova coppia di numeri amicabili rese celebre Fermat, la sua fama venne ampiamente confermata da una serie di ardue sfide matematiche che egli lanciò ai suoi colleghi del tempo. Ad esempio, Fermat notò che 26 si interpone tra un numero quadrato e un numero cubico: Infatti $25 = 5^2(5 \times 5)$, mentre $27 = 3^3(3 \times 3 \times 3)$. Fermat cercò altri numeri interposti fra un quadrato e un cubo, ma non potè trovarli e sospettò che 26 potesse essere un caso unico. Dopo giorni di dura fatica riuscì a costruire un sofisticato argomento che dimostrava al di là di ogni dubbio che 26 era davvero il solo numero posto tra un quadrato e un cubo. La sua dimostrazione stabilì che nessun altro numero poteva soddisfare quel criterio.

Fermat annunciò questa proprietà unica del 26 alla comunità dei matematici e poi li sfidò a dimostrare che questo era vero. Ammise apertamente di essere in possesso di una prova. La questione era se gli altri avevano l'ingegnosità di arrivare a una dimostrazione. Nonostante la semplicità dell'assunto, la prova è maledettamente complicata e Fermat si compiacque particolarmente di provocare i matematici inglesi Wallis e Digby che alla fine dovettero ammettere la sconfitta. In seguito la fama di Fermat fu destinata a crescere legata a un'altra sfida al resto del mondo. Si trattò però di un enigma scoperto accidentalmente e che Fermat non aveva mai inteso proporre alla pubblica discussione.

La nota al margine

Mentre studiava il libro II dell' *Arithmetica* Fermat si imbatté in tutta una serie di osservazioni, problemi e soluzioni che riguardavano il teorema di Pitagora e le terne pitagoriche. Per esempio, Diofanto discusse l'esistenza di particolari terne che formavano i cosiddetti «triangoli zoppi», nei quali le due gambe più corte, x e y, differiscono solo di una unità (ad esempio: $x = 20$, $y = 21$, $z = 29$ e $20^2 + 21^2 = 29^2$).

Fermat fu colpito dalla varietà e dall'enorme quantità di terne pitagoriche. Era consapevole che molti secoli prima Euclide aveva sviluppato una dimostrazione, riportata nell'appendice 5, che illustrava che, in realtà, esiste un numero infinito di terne pitagoriche. Fermat deve aver studiato la dettagliata esposizione di Diofanto sulle terne pitagoriche ed essersi chiesto che cosa ci fosse da aggiungere all'argomento. Mentre fissava la pagina, cominciò a giocare con l'equazione di Pitagora, cercando di scoprire qualcosa che fosse sfuggito ai greci. Improvvisamente, in un lampo di genialità che avrebbe reso immortale il Principe dei dilettanti, egli creò un'equazione che, sebbene molto simile a quella di Pitagora, non aveva soluzione alcuna. Era questa l'equazione che il decenne Andrew Wiles lesse nella Biblioteca di Milton Road.

Invece di considerare l'equazione

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Fermat considerò una variante della creazione di Pitagora:

$$x^3 + y^3 = z^3$$

Come abbiamo accennato nel capitolo precedente Fermat aveva semplicemente cambiato la potenza da 2 a 3, dal quadrato al cubo, ma questa nuova equazione apparentemente non aveva soluzioni possibili in numeri interi. Ripetuti tentativi mostrarono subito la difficoltà di trovare due numeri al cubo che, sommati, dessero un altro numero al cubo. Poteva davvero essere che questa piccola modifica trasformasse l'equazione di Pitagora da un'equazione con un numero infinito di soluzioni a un'equazione senza soluzioni?

Fermat modificò ulteriormente l'equazione elevandola a potenze superiori a 3 e scoprì che sarebbe stato altrettanto difficile trovare una soluzione a ognuna di queste equazioni. Secondo Fermat sembrava che non esistessero tre numeri che avrebbero soddisfatto l'equazione

$$x^n + y^n = z^n$$ dove *n* rappresenta 3,4,5……

In margine alla sua copia dell' *Arithmetica*, vicino al Problema 8, Fermat annotò questa osservazione:

> *Cubem autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere.*
>
> È impossibile scrivere un cubo come somma di due cubi o una quarta potenza come somma di due quarte potenze o, in generale, nessun numero che sia una potenza maggiore di due può essere scritto come somma di due potenze dello stesso valore.

Fra tutti i numeri possibili non sembrava esserci motivo perché non si potesse trovare almeno una soluzione, ma Fermat affermò che mai nell'universo infinito dei numeri esisteva una «terna fermatiana». Era un'affermazione straordinaria, ma che Fermat riteneva di poter dimostrare. Dopo aver definito la teoria in questa prima nota al margine, il genio birichino lasciò cadere un commento che avrebbe ossessionato generazioni di matematici:

> *Cuius rei demomtrationem mirabilem sane detexi hanc marginis exiguitas non caperet.*
>
> Dispongo di una meravigliosa dimostrazione di questo teorema che non può essere contenuta nel margine troppo stretto della pagina.

Ecco un esempio del comportamento davvero irritante di Fermat! Le sue parole suggeriscono che egli era particolarmente soddisfatto della sua «meravigliosa»

dimostrazione, ma non aveva intenzione di darsi pena di trascrivere nei dettagli l'argomento e ancor meno di pubblicarlo. Fermat non parlò mai con nessuno della sua dimostrazione e tuttavia, nonostante la sua indolenza e la sua modestia, l'Ultimo Teorema di Fermat, come poi sarebbe stato definito, era destinato a diventare famoso in tutto il mondo nei secoli a venire.

L'Ultimo Teorema infine pubblicato

La famosa scoperta di Fermat risale agli inizi della sua carriera di matematico, intorno al 1637. Quasi trent'anni dopo, mentre svolgeva le sue funzioni di giudice nella città di Castres, Fermat si ammalò gravemente. Il 9 gennaio 1665 siglò il suo ultimo mandato di arresto e tre giorni dopo morì. Le scoperte di Fermat rischiavano di andare perdute per sempre perché il loro autore era rimasto isolato dalla scuola di matematica di Parigi e non necessariamente veniva ricordato in maniera affettuosa dai suoi frustrati corrispondenti. Fortunatamente il figlio maggiore di Fermat, Clément-Samuel, che apprezzava l'importanza del passatempo paterno, era deciso a far sì che le scoperte del padre non andassero perdute. Grazie ai suoi sforzi oggi sappiamo qualcosa delle notevoli innovazioni di Fermat nella teoria dei numeri; in particolare, se non fosse stato per Clément-Samuel, l'enigma conosciuto come l'Ultimo Teorema di Fermat sarebbe morto con il suo creatore.

Clément-Samuel impiegò cinque anni a raccogliere gli appunti e le lettere del padre e a esaminare le frettolose annotazioni in margine alla copia dell' *Arithmetica*. La nota al margine che enuncia l'Ultimo Teorema era appunto una delle tante illuminanti riflessioni scribacchiate nel libro e Clément-Samuel decise di pubblicarle in un'edizione speciale dell' *Arithmetica*. Nel 1670 a Tolosa uscì *l'Aritmetica di Diofanto con le Osservazioni di P. de Fermat*. Insieme con l'originale greco e la traduzione latina di Bachet comparivano quarantotto osservazioni di Fermat. La seconda osservazione era quella destinata a essere conosciuta come l'Ultimo Teorema di Fermat.

Quando le *Osservazioni* di Fermat furono conosciute dalla più ampia comunità scientifica divenne chiaro che le lettere che aveva spedito ai suoi colleghi rappresentavano solo frammenti di un tesoro di scoperte. Le sue annotazioni personali enunciavano tutta una sequela di teoremi. Purtroppo non erano accompagnate da alcuna spiegazione e E non c'era il minimo accenno a una dimostrazione. Erano soltanto avvincenti intuizioni logiche che lasciavano i matematici nel dubbio se Fermat avesse avuto le prove, ma rappresentavano anche una sfida a completarle con dettagliate I dimostrazioni.

Leonhard Euler, uno dei massimi matematici del Settecento, cercò di provare una delle più eleganti osservazioni di Fermat, un teorema concernente i numeri primi. Un numero primo è un numero che non ha divisori tranne il numero 1 e se stesso. Per qualunque altro numero venga diviso un numero primo, la divisione porterà sempre un resto. Per esempio 13 è un numero primo, ma 14 non lo è. Il 13 non può essere diviso perfettamente per nessun numero, mentre il 14 può essere diviso per 2 e per 7. Tutti i numeri primi tossono essere suddivisi in due gruppi: quelli che equivalgono a

$4n + 1$ e quelli che equivalgono a $4n - 1$, dove n sta per un qualche numero. Ad esempio 13 appartiene al primo gruppo ($4 \times 3 + 1$), mentre 19 appartiene al secondo gruppo ($4 \times 5 - 1$). Il teorema di Fermat affermava che il primo tipo di numeri primi era sempre la somma di due quadrati ($13 = 2^2 + 3^2$), mentre il secondo tipo non poteva mai essere espresso in questo modo ($19 = ?^2 + ?^2$)[1]. Questa proprietà dei numeri primi è meravigliosamente semplice, ma cercare di dimostrarne la verità per ogni singolo numero primo si rivela notevolmente difficile. Per Fermat quella fu solo una tra le tante dimostrazioni che egli tenne per sé. A Euler si presentava la sfida di riscoprire la dimostrazione che aveva dato Fermat. Infine nel 1749, dopo sette anni di lavoro e a quasi un secolo dalla morte di Fermat, Euler riuscì a dimostrare questo teorema sui numeri primi.

La serie di teoremi di Fermat andava da quelli di carattere fondamentale a quelli che erano semplici curiosità. I matematici classificano l'importanza dei teoremi a seconda del loro impatto sul resto della matematica. In primo luogo un teorema è giudicato importante se è universalmente vero, ossia se si applica a un intero gruppo di numeri. Nel caso del teorema dei numeri primi di Fermat, esso non è vero soltanto per alcuni numeri primi, ma per tutti. In secondo luogo i teoremi dovrebbero rivelare qualche verità profonda e fondamentale in merito ai rapporti tra i numeri. Un teorema può essere il punto d'appoggio per produrre un intero gruppo di altri teoremi e può persino ispirare lo sviluppo di nuove branche della matematica. Infine un teorema è importante se intere aree di ricerca possono essere ostacolate nel loro sviluppo per la mancanza di un nesso logico. Molti matematici si sono disperati sapendo che avrebbero potuto dimostrare un nuovo importante teorema se solo avessero potuto stabilire un anello mancante nella loro catena di passaggi logici.

Poiché i matematici sfruttano i teoremi come gradini per arrivare ad altri risultati, era di importanza cruciale dimostrare ogni singolo teorema di Fermat. Non ci si poteva limitare a credere alla parola di Fermat che diceva di aver trovato la dimostrazione di un teorema. Prima di poter essere impiegato, ogni teorema dev'essere dimostrato con rigore impeccabile, altrimenti le conseguenze potrebbero essere disastrose. Per esempio, immaginate che i matematici abbiano accettato un teorema di Fermat. Verrebbe allora incorporato come singolo elemento in un'intera serie di altre più ampie dimostrazioni. A tempo debito queste più ampie dimostrazioni verrebbero inserite in altre dimostrazioni ancora più vaste e così via. Infine centinaia di teoremi potrebbero finire per dipendere dalla verità di un teorema iniziale non verificato. E se Fermat avesse commesso un errore e il teorema non verificato fosse in realtà sbagliato? Anche tutti gli altri teoremi che lo includono risulterebbero inficiati e vaste aree della matematica crollerebbero. I teoremi sono il fondamento della matematica, perché una volta stabilita la loro verità, su di essi si possono costruire con certezza altri teoremi. Le idee non provate sono infinitamente meno preziose di un teorema certo e vengono considerate solo congetture. Ogni argomentazione logica che si appoggia su una congettura è essa stessa una congettura.

[1] Nota dello scansionatore: i punti interrogativi sono tali anche nel testo, non si tratta di un errore di scansionamento.

Fermat affermò di avere una dimostrazione per ogni sua osservazione e dunque ai suoi occhi quelle osservazioni valevano come teoremi. Tuttavia finché la comunità scientifica in generale non riesce a riscoprire le singole dimostrazioni, ognuno di essi può essere considerato soltanto una congettura. Pertanto negli ultimi trecentocinquant'anni sarebbe stato più opportuno chiamare l'Ultimo Teorema di Fermat l'Ultima Congettura di Fermat.

Col passare dei secoli tutte le altre osservazioni di Fermat furono dimostrate l'una dopo l'altra, ma l'Ultimo Teorema si è rifiutato ostinatamente di cedere. Infatti è stato chiamato l'«Ultimo» Teorema, perché è rimasta l'ultima delle sue osservazioni a non essere dimostrata. Tre secoli di sforzi non sono riusciti a trovare una dimostrazione e questo ha determinato la notorietà del teorema, assurto al rango dell'enigma più difficile della matematica. Tuttavia, questa difficoltà riconosciuta non significava necessariamente che l'Ultimo Teorema di Fermat fosse un teorema importante secondo i criteri prima esposti. L'Ultimo Teorema, almeno fino a pochissimo tempo fa, non pareva conforme a molti di quei criteri: non sembrava che una volta dimostrato avrebbe condotto a qualcosa di profondo, che avrebbe fornito una qualche comprensione profonda dei numeri e che sarebbe stato utile per dimostrare altre congetture.

La fama dell'Ultimo Teorema proviene soltanto dalla pura difficoltà di dimostrarlo. Un ulteriore stimolo è aggiunto dal fatto che il Principe dei dilettanti dichiarò di essere in grado di dimostrare un teorema che da allora ha eluso gli sforzi di generazioni di matematici professionisti. I commenti informali in margine alla sua copia dell' *Arithmetica* furono letti come una sfida al mondo. Egli aveva dimostrato l'Ultimo Teorema: sorgeva la domanda se mai qualche matematico potesse eguagliare la sua genialità.

L'Ultimo Teorema di Fermat è un problema di enorme difficoltà e tuttavia lo si può enunciare in una forma comprensibile a uno scolaretto. Non può esistere un problema in fisica, in chimica o in biologia che possa essere affermato in maniera così semplice e inequivocabile e che sia rimasto irrisolto per così tanto tempo. Nel suo libro *The Last Problem* E.T. Bell scrisse che la civiltà probabilmente sarebbe arrivata alla fine prima che l'Ultimo Teorema di Fermat potesse essere risolto. Dimostrarlo diventò la posta più alta nel campo della teoria dei numeri e non c'è da sorprendersi che abbia condotto ad alcuni tra gli episodi più avvincenti nella storia della matematica. La ricerca di una dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat ha irretito le menti più grandi del pianeta, dispensando enormi ricompense, disperazioni suicide e duelli all'alba.

Quest'enigma ha oltrepassato il mondo chiuso della matematica. Nel 1958 entrò persino in un racconto di sapore faustiano. Un'antologia intitolata Deals with the Devil (Patti con il Diavolo) contiene una novella di Arthur Poges. In *Il Diavolo e Simon Flagg* il Diavolo chiede a Simon Flagg di fargli delle domande. Se il Diavolo saprà rispondere entro ventiquattr'ore, si prenderà l'anima di Simon, ma se fallirà dovrà dare a Simon centomila dollari. Simon pone la domanda: «L'Ultimo Teorema di Fermat è corretto?». Il Diavolo scompare e gira intorno al mondo per assimilare ogni frammento di sapere matematico che sia mai stato creato. Il giorno dopo torna e ammette la sconfitta:

«Hai vinto, Simon», disse, quasi in un bisbiglio, guardandolo con rispetto sincero. «Neppure io posso imparare abbastanza matematica in un tempo così breve per risolvere un problema tanto difficile. Più mi sono sprofondato nella questione e più difficile è diventata. Scomposizione non unica in fattori primi, ideali... Bah! Sai», confidò il Diavolo, «che neppure i migliori matematici negli altri pianeti, che sono tutti molto più progrediti del vostro, l'hanno risolto? Su Saturno c'è un tipo - assomiglia a un fungo su un paio di trampoli - che risolve le equazioni differenziali alle derivate parziali a memoria e anche lui ha rinunciato».

3
UNA SCIAGURA MATEMATICA

> La matematica non è una marcia in perfetto ordine lungo un corso sgombro e diritto, ma è un viaggio in una strana terra selvaggia, dove spesso gli esploratori si perdono. Il rigore dovrebbe essere un segnale per lo storico che le mappe sono state tracciate e che i veri esploratori sono andati altrove.
>
> W.S. ANGLIN

«Da quando l'ho incontrato per la prima volta da bambino, l'Ultimo Teorema di Fermat è stata la mia grande passione», ricorda Andrew Wiles con voce esitante che trasmette l'emozione che lui prova di fronte a questo problema. «Trovai questo problema che era rimasto irrisolto per trecento anni. Non mi sembrava che i miei compagni di scuola avessero una cotta per la matematica e perciò non ne parlai con loro. Ma avevo un insegnante che aveva svolto ricerche di matematica e che mi diede un libro sulla teoria dei numeri; quel testo mi offrì qualche indicazione su come iniziare ad affrontare il problema. Tanto per cominciare, lavorai con l'idea che Fermat non conoscesse la matematica molto più di quanto la conoscessi io. Tentai di trovare la soluzione perduta usando il tipo di metodi che lui avrebbe potuto usare.» Wiles era un bambino tanto ingenuo quanto ambizioso, che scorse l'opportunità di riuscire dove generazioni di matematici erano fallite. Ad altri questa sua impresa sarebbe potuta sembrare un sogno folle, ma il giovane Andrew aveva ragione nel pensare che lui, un alunno di una scuola media del ventesimo secolo, conoscesse altrettanta matematica di quanta ne conosceva Pierre de Fermat, genio del Seicento. Forse nella sua ingenuità egli si sarebbe imbattuto in una dimostrazione che altre menti, più sofisticate, non avevano scorto.

Nonostante l'entusiasmo ogni calcolo lo portò a un punto morto. Dopo essersi spremuto le meningi e aver sfogliato tutti i manuali scolastici, non aveva concluso niente. Dopo un anno di fallimenti, cambiò strategia e decise che avrebbe potuto imparare qualcosa dagli errori di altri più eminenti matematici. «L'Ultimo Teorema di Fermat ha avuto una storia incredibilmente romanzesca. Molti ci hanno riflettuto e più i grandi matematici del passato hanno cercato di risolvere il problema senza riuscirci, più esso è diventato una sfida e un mistero. Molti matematici ci avevano provato in mille modi nel Settecento e nell'Ottocento e perciò da adolescente decisi che avrei dovuto studiare i loro metodi e cercare di capire che cosa avevano fatto.»

Il giovane Wiles esaminò le impostazioni di chiunque avesse fatto un serio tentativo per risolvere l'Ultimo Teorema di Fermat. Cominciò a studiare l'opera del

più prolifico matematico della storia, il primo che avesse ottenuto qualche risultato nella battaglia contro Fermat.

Il Ciclope matematico

Creare la matematica è un'esperienza sofferta e misteriosa. Spesso l'oggetto della dimostrazione è chiaro, ma la procedura è avvolta nella nebbia e il matematico inciampa nei calcoli, terrorizzato all'idea che ogni passaggio, se sbagliato, possa portare l'argomentazione in una direzione del tutto erronea. Per di più c'è il timore che non esista alcuna strada. Un matematico può credere che un enunciato sia vero, impiegare anni per dimostrarlo, mentre in realtà si tratta di un enunciato falso. Il matematico ha così effettivamente tentato di dimostrare l'impossibile.

In tutta la storia di questa disciplina solo pochissimi matematici sembrano essersi sottratti al dubbio che ha intimidito i loro colleghi. Forse l'esempio più significativo di un matematico cosiffatto fu il genio settecentesco Leonhard Euler al quale si devono i primi progressi verso la dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat. Euler aveva un'intuizione incredibile e una memoria prodigiosa, tali che si diceva che potesse svolgere mentalmente un lungo calcolo senza dover mai prendere penna e carta. In tutta Europa era conosciuto con l'appellativo di «analisi incarnata» e l'accademico francese François Arago disse: «Euler calcolava senza sforzo apparente così come gli uomini respirano o le aquile si librano nel vento».

Leonhard Euler era nato a Basilea nel 1707, figlio di un pastore calvinista, Paul Euler. Anche se il giovane Euler mostrò un talento prodigioso per la matematica, il padre era deciso a fargli studiare teologia perché potesse intraprendere la carriera ecclesiastica. Leonhard obbedì rispettosamente e studiò teologia e lingua ebraica all'Università di Basilea.

Fortunatamente per Euler la città di Basilea era anche la patria dei Bernoulli. I Bernoulli erano una singolare famiglia di matematici che, in sole tre generazioni, aveva prodotto otto menti matematiche di primo livello; si è detto che la famiglia Bernoulli sia stata per la matematica ciò che la famiglia Bach è stata per la musica. La loro fama si sparse al di là della comunità dei matematici, come ci viene confermato da un aneddoto. Daniel Bernoulli una volta era in viaggio per l'Europa e aveva iniziato una conversazione con uno straniero. Dopo qualche tempo si presentò: «Sono Daniel Bernoulli». «E io», rispose sarcastico l'interlocutore, «sono Isaac Newton.» Daniel amava ricordare l'episodio in parecchie occasioni, considerandolo il più sincero omaggio alla sua fama che avesse mai ricevuto.

Daniel e Nikolaus Bernoulli erano amici stretti di Leonhard Euler e si resero conto che il più intelligente dei matematici era stato trasformato nel più mediocre teologo. Si rivolsero a Paul Euler e gli chiesero di concedere a Leonhard di deporre la tonaca a favore dei numeri. Il padre di Euler a suo tempo aveva appreso la matematica da Jakob Bernoulli, suo coetaneo, e nutriva per quella famiglia un grandissimo rispetto. Con riluttanza accettò che la vocazione del figlio fosse di calcolare e non di pregare.

Leonhard Euler ben presto lasciò la Svizzera per i palazzi di Berlino e San Pietroburgo, dove avrebbe trascorso i suoi anni creativi. All'epoca di Fermat i

matematici venivano considerati dilettanti che si trastullavano con i numeri, ma nel Settecento erano trattati come professionisti che risolvevano problemi. La cultura matematica era cambiata drasticamente e ciò si doveva in parte all'opera di Isaac Newton e dei suoi calcoli scientifici.

Newton riteneva che i matematici stessero sprecando il proprio tempo stuzzicandosi con assurdi quesiti. Al contrario egli applicava la matematica al mondo fisico e calcolava tutto, dalle orbite dei pianeti alla traiettoria dei proiettili di artiglieria. Alla morte di Newton, nel 1727, l'Europa era passata attraverso la rivoluzione scientifica e nello stesso anno Euler pubblicò il suo primo scritto. Anche se esso conteneva calcoli matematici eleganti e innovativi, il suo scopo primario era di descrivere la soluzione di un problema tecnico concernente l'alberatura delle navi.

Le potenze europee non erano interessate a una matematica che esplorasse concetti esoterici e astrusi, ma volevano sfruttare la matematica per risolvere problemi pratici e a tal fine entrarono in competizione per ingaggiare le menti migliori. Euler cominciò la sua carriera presso gli zar, prima di essere invitato all'Accademia di Berlino da Federico il Grande di Prussia. Alla fine tornò in Russia, dove trascorse gli ultimi anni della sua vita durante il regno di Caterina la Grande. Nella sua carriera affrontò moltissimi problemi, che andavano dalla navigazione alle finanze, dall'acustica all'irrigazione. La necessità di risolvere problemi pratici non ottuse l'abilità matematica di Euler. Al contrario, ogni nuovo compito lo spingeva a creare ingegnosi e innovativi sviluppi matematici. La sua passione unica lo spingeva a scrivere parecchi elaborati in un solo giorno e si dice che fra la prima e la seconda chiamata per la cena egli tentasse di stendere di getto un calcolo completo degno di pubblicazione. Euler non sprecava un minuto e anche quando cullava un bambino con un braccio, con l'altro continuava a scrivere i passaggi di una dimostrazione matematica.

Uno dei più grandi risultati di Euler fu lo sviluppo del metodo algoritmico. Lo scopo degli algoritmi di Euler era di affrontare problemi apparentemente impossibili da risolvere. Uno di questi era quello di prevedere le fasi lunari con la massima accuratezza e spingendosi il più avanti possibile nel futuro: informazione che poteva essere utilizzata per stendere tavole di navigazione molto preziose. Newton aveva già mostrato che è relativamente facile prevedere l'orbita di un corpo intorno a un altro, ma nel caso della luna la situazione non è così semplice. La luna orbita intorno alla terra, ma c'è un terzo corpo, il sole, che complica enormemente la questione. Mentre la luna e la terra si attraggono reciprocamente, il sole perturba la posizione della terra e in tal modo influisce sull'orbita della luna. Si potevano adoperare equazioni per stabilire l'effetto di ognuno dei due corpi, ma i matematici del Settecento non sapevano includere il terzo corpo nei loro calcoli. Anche oggi è impossibile prevedere la soluzione esatta del cosiddetto «problema dei tre corpi».

Euler capì che i naviganti non avevano bisogno di conoscere le fasi lunari con precisione assoluta, ma solo con quell'accuratezza sufficiente a permettere loro di identificare la propria posizione entro un raggio di qualche miglio marino. Di conseguenza sviluppò un metodo per trovare una soluzione imperfetta, ma sufficientemente accurata. Questo metodo, noto come algoritmo, funzionava in modo tale da ottenere in prima istanza un risultato approssimativo, che però poteva essere

poi reinserito nell'algoritmo in modo che scaturisse un risultato più preciso. Questo secondo risultato poteva essere di nuovo sottoposto all'algoritmo per generare un altro risultato, ancor più preciso e così via. Dopo cento iterazioni o poco più Euler fu in grado di fornire una posizione della luna abbastanza precisa per gli scopi della marineria. Consegnò il suo algoritmo all'Ammiragliato britannico e in cambio ricevette un compenso di trecento sterline.

Euler si guadagnò la fama di saper risolvere tutti i problemi che gli venivano posti, con un talento che sembrava andare ben oltre il regno della scienza. Durante la permanenza alla corte di Caterina di Russia incontrò il grande filosofo francese Denis Diderot. Diderot era un ateo convinto e passava il suo tempo a cercare di convertire i russi all'ateismo. Questo irritò Caterina, che chiese a Euler di bloccare le iniziative dell'empio francese.

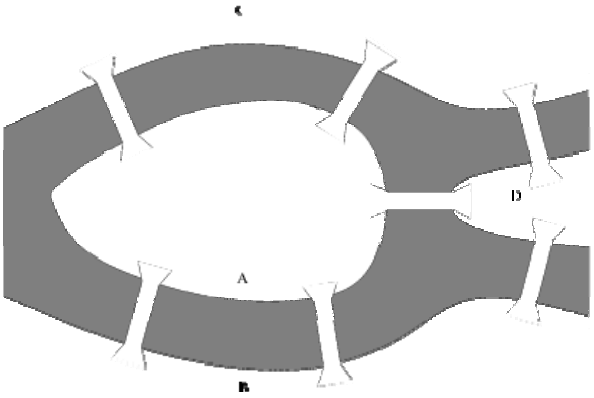
Euler pensò alla questione per qualche tempo e affermò di disporre di una prova algebrica dell'esistenza di Dio. Caterina la Grande invitò Euler e Diderot a palazzo e fece riunire tutti i cortigiani per ascoltare il dibattito teologico. Euler si alzò dinanzi all'uditorio e annunciò:

«Signore, $\frac{a+b^n}{n}=x$, dunque Dio esiste; risponda!».

Non conoscendo bene l'algebra, Diderot non potè controbattere nulla al più grande matematico europeo e rimase senza parole. Umiliato, lasciò San Pietroburgo e tornò a Parigi. Nella sua assenza Euler continuò a dilettarsi di studi teologici e pubblicò parecchie altre pretese dimostrazioni sulla natura di Dio e dello spirito umano.

Un problema più concreto, che non mancò di attirare il carattere bizzarro di Euler, riguardava la città prussiana di Königsberg, oggi nota con il nome russo di Kaliningrad. La città si erge sulle sponde del fiume Pregel e consiste di quattro quartieri separati, collegati da sette ponti. La figura 3.1 mostra la mappa della città.

Figura 3.1



Il fiume Pregel divide la città di Königsberg in quattro parti separate, A, B, C e D. Sette ponti collegano le diverse parti della città e un I quesito locale chiedeva se fosse possibile percorrere tutti i ponti attraversando ciascuno di essi una sola volta.

Alcuni tra gli abitanti più curiosi si chiesero se fosse possibile immaginare un viaggio passando attraverso tutti i sette ponti senza dover attraversare più di una volta ognuno di essi. I cittadini di Königsberg provarono vari percorsi, ma senza riuscire nell'intento. Anche Euler non potè trovare il percorso richiesto, ma riuscì a spiegare perché un viaggio simile era impossibile.

Euler cominciò con il tracciare una mappa della città, dalla quale ricavò una rappresentazione semplificata in cui le sezioni di terra venivano ridotte a punti e i ponti venivano sostituiti da linee, come mostrato nella figura 3.2.

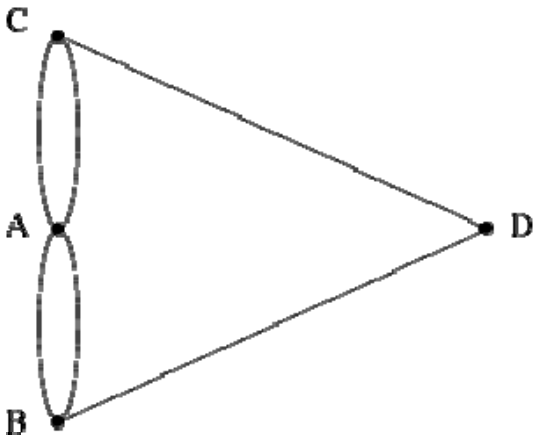


Figura 3.2: Una rappresentazione semplificata dei ponti di Königsberg.

Poi argomentò che, in generale, per poter riuscire a effettuare il viaggio ipotizzato (ossia attraversare tutti i ponti una sola volta), un punto dovrebbe essere collegato a un numero pari di linee. Questa deduzione si deve al fatto che nel corso del viaggio, quando un viaggiatore attraversa un'estensione di terra, deve entrarvi da un ponte e uscirne da un altro ponte. Questa regola subisce soltanto due eccezioni: quando un viaggiatore comincia o finisce il viaggio. All'inizio del viaggio il viaggiatore parte da un pezzo di terra e ha bisogno di un solo ponte per uscirne; così pure alla fine del viaggio il viaggiatore arriva in un pezzo di terra e ha bisogno di un solo ponte per entrarvi. Se il viaggio comincia e finisce in località differenti, allora queste due sezioni di terra possono avere un numero dispari di ponti. Ma se il viaggio comincia e finisce nello stesso luogo, allora anche questo punto, come tutti gli altri punti, deve avere un numero pari di ponti.

Perciò, in generale, Euler concluse che, per ogni rete di ponti è possibile fare un viaggio completo, attraversando ogni ponte una sola volta, soltanto se tutte le parti di terra hanno un numero pari di ponti o se ci sono esattamente due parti di terra che hanno un numero dispari di ponti. Nel caso di Königsberg ci sono in tutto quattro parti di terra e tutte sono collegate a un numero dispari di ponti: tre punti sono collegati a tre linee cioè a tre ponti e uno a cinque linee ossia a cinque ponti. Euler aveva potuto spiegare perché era impossibile attraversare ogni ponte di Kònigsberg una e una sola volta e inoltre aveva formalizzato una regola che poteva applicarsi a ogni rete di ponti in qualunque città del mondo. L'argomento è meravigliosamente semplice ed era forse uno di quei problemi di logica che Euler risolveva la sera prima di andare a cena.

Quando Euler incontrò per la prima volta l'Ultimo Teorema di Fermat, deve aver sperato di poterlo risolvere adottando una strategia altrettanto semplice. L'Ultimo Teorema di Fermat afferma che per un numero infinito di equazioni non ci sono

soluzioni in numeri interi. Ricordate che Fermat asserì che non ci sono soluzioni in numeri interi per la seguente equazione:

$x^n + y^n = z^n$, dove n è un qualunque numero maggiore di 2.

Questa equazione rappresenta una serie infinita di equazioni:

$$x^3 + y^3 = z^3,$$
$$x^4 + y^4 = z^4,$$
$$x^5 + y^5 = z^5,$$
$$x^6 + y^6 = z^6,$$
$$x^7 + y^7 = z^7,$$
$$\ldots$$

Euler si chiese se poteva dimostrare che una delle equazioni non aveva soluzioni e poi estrapolare il risultato per tutte le restanti equazioni. Egli cominciò la sua impresa nel migliore dei modi quando scoprì un'indicazione nascosta negli scarabocchi di Fermat. Benché Fermat non avesse mai scritto per esteso la dimostrazione dell'Ultimo Teorema, descrisse in maniera criptica una dimostrazione per il caso specifico di $n = 4$ in un punto diverso della sua copia dell'Arìthmetica e la inserì in una dimostrazione relativa a un problema del tutto diverso. Anche se si tratta del calcolo più completo che Fermat abbia mai consegnato alle carte, i dettagli restano tuttavia vagamente abbozzati e Fermat conclude la dimostrazione dicendo che per mancanza di tempo e di carta non può fornire una spiegazione più completa. Nonostante gli scarabocchi di Fermat siano poco dettagliati, illustrano chiaramente una particolare forma di dimostrazione per assurdo conosciuta come *metodo della discesa infinita.*

Allo scopo di dimostrare che non esistevano soluzioni per l'equazione $x^4 + y^4 = z^4$, Fermat iniziò con l'assumere che esistesse una soluzione ipotetica

$$x = X_1 \qquad y = Y_1 \qquad z = Z_1$$

Esaminando le proprietà di (X_1, Y_1, Z_1), Fermat potè dimostrare che se esisteva questa soluzione ipotetica, allora avrebbe dovuto esserci una soluzione più piccola (X_2, Y_2, Z_2). Poi, esaminando questa nuova soluzione, Fermat potè mostrare che avrebbe dovuto essercene un'altra ancora più piccola (X_3, Y_3, Z_3) e così via.

Fermat aveva scoperto una scala discendente di soluzioni, che in teoria potevano continuare per sempre, generando numeri sempre più piccoli. Ma x,y e z devono essere numeri interi e perciò la scala discendente è impossibile perché dev'esserci una possibile soluzione minima. Questa contraddizione dimostra che l'ipotesi iniziale che ci sia una soluzione (X_1, Y_1, Z_1) dev'essere falsa. Adoperando il metodo della discesa infinita Fermat aveva dimostrato che l'equazione con $n = 4$ non può avere soluzione alcuna, perché altrimenti le conseguenze sarebbero assurde.

Euler cercò di usare questa procedura come punto di partenza per la costruzione di una dimostrazione generale per tutte le altre equazioni. Come doveva salire fino a

n = infinito, cosí doveva anche scendere a n = 3 e fu questo gradino in basso che egli riuscí a raggiungere per primo. Il 4 agosto 1753 Euler annunciò in una lettera al matematico prussiano Christian Goldbach di aver adottato il metodo della discesa infinita di Fermat e di aver dimostrato con successo l'impossibilità di una soluzione nel caso di n = 3. Dopo cento anni era la prima volta che qualcuno aveva fatto qualche progresso in risposta alla sfida di Fermat.

Per ampliare la dimostrazione di Fermat dal caso di n = 4 al caso di n = 3, Euler dovette considerare lo strano concetto di un cosiddetto numero immaginario, un'entità che era stata scoperta dai matematici europei nel sedicesimo secolo. É strano pensare che si possano «scoprire» nuovi numeri, ma ciò deriva soprattutto dal fatto che i numeri che adoperiamo ci sono cosí familiari che dimentichiamo che un tempo alcuni di essi non erano conosciuti. I numeri negativi, le frazioni e i numeri irrazionali furono tutti scoperti nel corso dei secoli in seguito all'esigenza di rispondere a problemi altrimenti insolubili.

La storia dei numeri comincia con i numeri naturali (1, 2, 3…). Questi numeri soddisfano l'esigenza di addizionare semplici quantità intere, come le pecore di un gregge o le monete d'oro, e ottenere un totale che è anch'esso un numero intero. Come l'addizione, anche quell'altra semplice operazione che è la moltiplicazione adopera numeri interi per produrre altri numeri interi. L'operazione della divisione presenta invece un problema scabroso. Mentre 8 diviso 2 dà 4, 2 diviso 8 dà 1/4. Il risultato dell'ultima divisione non è un numero intero, ma una frazione o numero frazionario.

La divisione è una semplice operazione eseguita con i numeri naturali che ci impone di guardare oltre i numeri naturali per poter ottenere una soluzione. È impensabile per i matematici non essere in grado, almeno in teoria, di rispondere a tutti i problemi che si presentano loro e questa necessità è definita completezza. Vi sono certe questioni concernenti i numeri naturali che rimarrebbero senza risposta qualora non si ricorresse alle frazioni. I matematici esprimono questa situazione dicendo che le frazioni sono necessarie per esigenze di completezza.

È questo bisogno di completezza che condusse gli indù a scoprire i numeri negativi. Gli indù notarono che mentre sottraendo 3 da 5 si otteneva ovviamente 2, sottrarre 5 da 3 non era un'operazione altrettanto semplice. La risposta stava oltre i numeri naturali fino allora conosciuti e poteva essere trovata solo introducendo il concetto di numero negativo. Alcuni matematici non accettarono questo sviluppo nel campo dell'astrazione e definirono i numeri negativi «assurdi» o «fittizi». Un contabile poteva calcolare una moneta d'oro o anche mezza moneta d'oro, ma gli era certo impossibile calcolare una moneta negativa.

I greci nutrivano anch'essi l'ambizione alla completezza e questo li indusse a scoprire i numeri irrazionali. Nel secondo capitolo abbiamo visto sorgere il problema di quale numero fosse la radice quadrata di 2. I greci sapevano che questo numero era all'incirca uguale a 7/5, ma quando cercarono di scoprire la frazione esatta trovarono che non esisteva. Ecco un numero che non poteva mai essere rappresentato da una frazione e che si rendeva necessario per rispondere alla semplice domanda: qual è la radice quadrata di 2? L'esigenza di completezza impose l'annessione di un'altra colonia all'impero dei numeri.

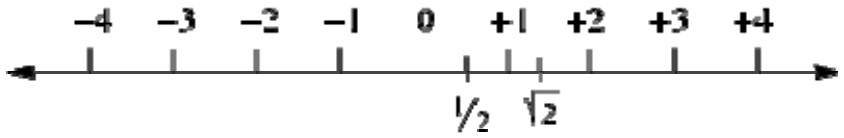


Figura 3.3: Tutti i numeri possono essere disposti lungo la retta numerica, che si estende all'infinito in ambo le direzioni.

Con il Rinascimento i matematici ritennero di aver scoperto tutti i numeri esistenti. Si poteva pensare a tutti i numeri come giacenti su una *retta numerica*, cioè una linea retta a ogni punto della quale corrisponde uno e un solo numero, come mostrato nella figura 3.3. I numeri interi erano distanziati da intervalli uguali, con i numeri positivi a destra dello zero che si estendevano verso l'infinito positivo e i numeri negativi a sinistra dello zero che si estendevano verso l'infinito negativo. Le frazioni occupavano gli spazi fra i numeri interi e i numeri irrazionali erano frammisti alle frazioni.

La retta dei numeri suggerisce l'idea che la completezza era stata finalmente raggiunta. Tutti i numeri sembravano al loro posto, pronti a essere adoperati per rispondere a tutte le questioni matematiche: in ogni caso nella retta numerica non c'era più spazio per alcun nuovo numero. Ma durante il sedicesimo secolo vi furono nuovi sconvolgimenti. Il matematico italiano Raffaele Bombelli stava studiando le radici quadrate di vari numeri, quando si imbatté in una questione alla quale non sapeva rispondere.

Il problema iniziò con la domanda: qual è la radice quadrata di 1, $\sqrt{1}$? La risposta ovvia è 1, perché $1 \times 1 = 1$. La risposta meno ovvia è –1. Un numero negativo moltiplicato per un altro numero negativo genera un numero positivo. Questo significa che $-1 \times -1 = +1$. Perciò, la radice quadrata di 1 è sia +1 sia –1. Questa risposta duplice non presenta problemi, ma fa sorgere la domanda: qual è la radice quadrata di –1, $\sqrt{-1}$? Il problema sembra insolubile. La soluzione non può essere +1 o –1, perché il quadrato di entrambi i numeri è +1. Tuttavia non ci sono altri candidati naturali. Allo stesso tempo la completezza richiede che si debba e possa trovare una risposta alla domanda.

La soluzione per Bombelli era quella di creare un nuovo numero, *i*, chiamato *numero immaginario,* che era definito semplicemente come la soluzione alla domanda, *qual è la radice quadrata di un numero negativo?* Questa può sembrare una soluzione opportunistica del problema, ma non era molto diversa dalla procedura con cui vennero introdotti i numeri negativi. Dinanzi a una questione altrettanto difficile gli indù avevano semplicemente definito -1 la risposta alla domanda: *qual è il risultato della sottrazione di uno da zero?* È più facile accettare il concetto di –1 solo perché abbiamo esperienza del concetto analogo di «debito», mentre nel mondo concreto non abbiamo alcuna esperienza che sorregga il concetto di numero immaginario. Il matematico e filosofo tedesco Gottfried Leibniz descrisse con eleganza la strana natura del numero immaginario: «Il numero immaginario è un

bello e meraviglioso espediente dello spirito divino, quasi un anfibio tra l'essere e il non-essere».

Dopo aver definito *i* come la radice quadrata di –1, deve esistere anche 2*i* che sarebbe la somma di *i* più *i* (e che sarebbe pure la radice quadrata di –4). Allo stesso modo deve esistere *i*/2 perché questo è il risultato di dividere *i* per 2. Effettuando semplici operazioni è possibile ottenere un equivalente immaginario di ogni cosiddetto *numero reale*. Ci sono numeri naturali immaginari, numeri negativi immaginari, frazioni immaginarie e irrazionali immaginari.

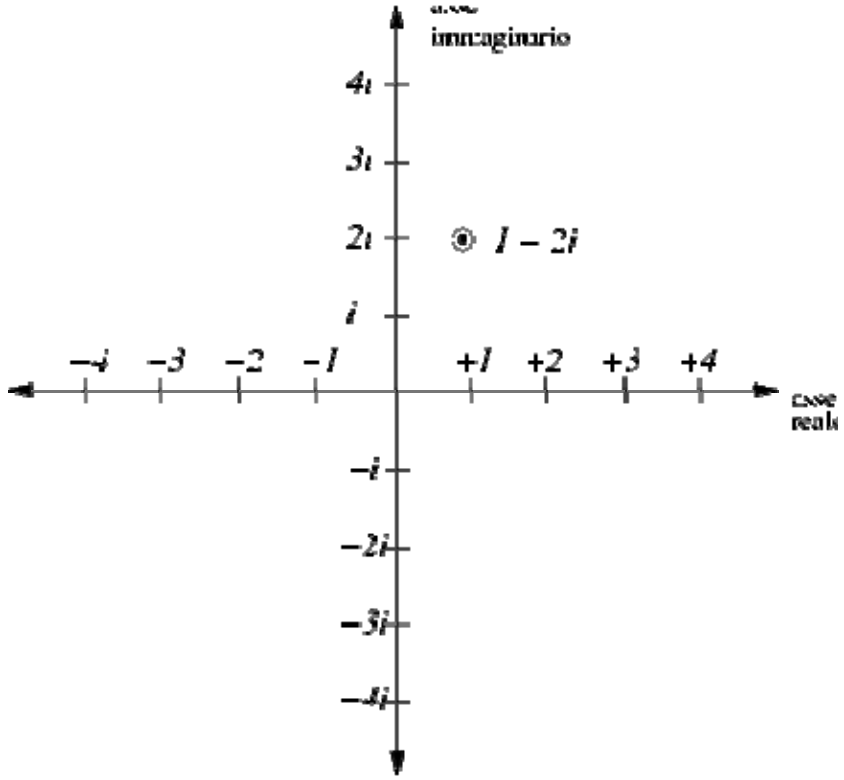


Figura 3.4: L'introduzione di un asse dei numeri immaginari trasforma la retta numerica in un piano numerico. Ogni combinazione dei numeri reali e di quelli immaginari ha la sua posizione nel piano numerico.

Sorge però il problema che tutti questi numeri immaginari, non hanno una posizione naturale lungo la retta dei numeri reali. I matematici risolvono il problema creando una diversa retta dei numeri immaginari perpendicolare a quella dei numeri reali e che la interseca nello zero, come mostra la figura 3.4. I numeri non sono più ristretti a una retta, cioè a una dimensione, ma occupano invece un piano bidimensionale. Mentre i numeri puramente reali o puramente immaginari sono confinati nelle loro rispettive rette, le combinazioni di numeri reali e immaginari (ad esempio 1 + 2*i*), chiamate *numeri complessi*, sono disposte nel cosiddetto piano numerico.

Ciò che è davvero significativo è che i numeri complessi possono essere usati per risolvere ogni concepibile equazione. Per esempio, allo scopo di calcolare $\sqrt{3+4i}$, i matematici non devono ricorrere a un nuovo tipo di numero: la risposta è infatti 2 + *i*,

un altro numero complesso. In altre parole i numeri immaginari sembrano essere l'elemento conclusivo richiesto per completare la matematica.

Anche i matematici puri hanno sfruttato i numeri immaginari, adoperandoli per trovare risposte a problemi precedentemente impenetrabili. I numeri immaginari aggiungono letteralmente una nuova dimensione alla matematica ed Euler confidava di sfruttare questa ulteriore libertà di manovra per attaccare l'Ultimo Teorema di Fermat.

Nel passato altri matematici avevano cercato di adattare il metodo della discesa infinita di Fermat per farlo funzionare in casi diversi da $n = 4$, ma i tentativi di allargare questa tecnica dimostrativa avevano sempre condotto a lacune logiche. Euler mostrò però che includendo i, ossia il numero immaginario, nella sua prova, egli poteva colmare le lacune della dimostrazione e costringere il metodo della discesa infinita a funzionare per il caso di $n = 3$.

Fu un risultato eccezionale, ma che egli non potè ripetere per altri casi dell'Ultimo Teorema di Fermat. Purtroppo ,gli sforzi di Euler di far funzionare la stessa procedura per i casi che vanno da $n = 5$ fino all'infinito si conclusero tutti con un fallimento. Il matematico più creativo della storia fu umiliato dalla sfida di Fermat. La sua unica consolazione fu di aver fatto il primo passo in avanti verso la soluzione del problema più difficile al mondo.

Per nulla scoraggiato dal fallimento, Euler continuò a creare geniali teorie matematiche fino alla morte, un risultato reso ancor più notevole dal fatto che durante la fase conclusiva della sua carriera rimase completamente cieco. Cominciò a perdere la vista nel 1735, quando l'Accademia di Parigi offrì un premio per la soluzione di un problema di astronomia. Il problema era così arduo che i matematici chiesero all'Accademia qualche mese di tempo per poter formulare la risposta, ma Euler non ne ebbe bisogno. Si fece prendere dall'ossessione di risolvere il problema, lavorò ininterrottamente per tre giorni e vinse il premio. Tuttavia le condizioni disagiate di lavoro e l'intenso affaticamento costarono a Euler, che non aveva ancora trent'anni, la perdita della vista dall'occhio destro, come mostrano alcuni noi ritratti.

Su suggerimento di Jean Le Rond D'Alembert, Euler venne sostituito da Joseph-Louis Lagrange come matematico alla corte di Federico il Grande, che in seguito dichiarò: «Devo alla vostra cura e ai vostri suggerimenti se ho sostituito un matematico mezzo cieco con un matematico che ha tutti e due gli occhi, cosa che renderà particolarmente soddisfatti gli studiosi di anatomia membri della mia Accademia». Euler tornò in Russia dove Caterina la Grande accolse benevolmente il suo «ciclope matematico».

La perdita di un occhio non era un handicap grave; «ora avrò minore occasione di distrazione», fu il commento di Euler. Trent'anni dopo, all'età di sessant'anni, la situazione peggiorò considerevolmente, quando una cataratta all'occhio ancora sano lo ridusse alla cecità completa. Egli era però deciso a non smettere di lavorare e cominciò a esercitarsi a scrivere tenendo chiuso l'occhio sinistro, mentre la vista scemava sempre più, per perfezionare la sua tecnica di scrittura prima che sopravvenisse l'oscurità completa. Nel giro di qualche settimana restò cieco. Per un po' i suoi esercizi di scrittura compensarono la sopravvenuta cecità, ma dopo qualche mese la grafia di Euler divenne illeggibile e il figlio Albert diventò il suo amanuense.

Euler continuò a produrre matematica nei diciassette anni successivi e fu persino più fecondo che in passato. Il suo intelletto smisurato gli consentiva di sviluppare i concetti senza doverli mettere su carta e la sua memoria fenomenale gli permetteva di usare il cervello come una biblioteca. I colleghi commentarono che l'insorgere della cecità pareva avesse allargato l'orizzonte della sua immaginazione. È degno di nota che il calcolo delle posizioni lunari venne completato da Euler quando ormai era cieco. Per i regnanti europei quella fu la conquista matematica più importante; si trattava di un problema che aveva confuso i più grandi matematici europei, compreso Newton.

Nel 1776 venne tentata un'operazione per rimuovere la cataratta e per qualche giorno la vista di Euler sembrò ripristinata. Poi sopravvenne un'infezione ed Euler sprofondò di nuovo nel buio. Imperterrito continuò a lavorare fino al 18 settembre 1783, quando morì di un colpo apoplettico. Come scrisse il matematico e filosofo Condorcet: «Euler ha cessato di vivere e di calcolare».

A piccoli passi

Un secolo dopo la morte di Fermat esistevano dimostrazioni per soli due casi specifici dell'Ultimo Teorema. Fermat aveva offerto ai matematici un buon punto di partenza fornendo la dimostrazione che non c'erano soluzioni all'equazione:

$$x^4+y^4 = z^4$$

Euler aveva adattato la dimostrazione di Fermat per provare che non esistevano soluzioni per :

$$x^3+y^3 = z^3$$

Dopo il risultato di Euler era ancora necessario dimostrare che non c'erano soluzioni con numeri interi per un'infinità di equazioni:

$$x^5 + y^5 = z^5,$$
$$x^6 + y^6 = z^6,$$
$$x^7 + y^7 = z^7,$$
$$x^8 + y^8 = z^8,$$
$$x^9 + y^9 = z^9$$
$$\ldots$$

Anche se i matematici procedevano molto a rilento, la situazione non era così brutta come poteva sembrare a prima vista. La dimostrazione per il caso $n = 4$ vale anche per i casi $n = 8,12,16,20\ldots$ La ragione è che ogni numero che può essere scritto alla ottava (o dodicesima, sedicesima, ventesima…) potenza può anche essere riscritto come un numero alla quarta potenza. Per esempio, il numero 256 è uguale a 2^8, ma è anche uguale a 4^4. Perciò ogni dimostrazione che vale per una potenza alla quarta, varrà anche per una potenza alla ottava e per ogni altra potenza multipla di 4. Adottando lo stesso principio, la dimostrazione di Euler per il caso $n = 3$ dimostra automaticamente i casi $n = 6,9,12,15\ldots$

Di colpo i numeri cadono l'uno sull'altro e Fermat appare vulnerabile. La prova per il caso di $n = 3$ è particolarmente significativa perché il numero 3 è un esempio di numero primo. Come spiegato in precedenza, un numero primo ha la proprietà particolare di non essere multiplo di alcun numero intero tranne che dell'uno e di se stesso. Altri numeri primi sono 5, 7, 11, 13…Tutti i rimanenti numeri sono multipli dei numeri primi e vengono definiti numeri composti.

I teorici dei numeri considerano i numeri primi i più importanti di tutti perché sono gli atomi della matematica. I numeri primi sono i mattoni della costruzione numerica perché tutti gli altri numeri possono essere creati moltiplicando le combinazioni di numeri primi. Questo sembra portare a un grande passo avanti. Per dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat per tutti i valori di *n*, si deve semplicemente dimostrarlo per i valori primi di *n*. Tutti gli altri casi sono soltanto i multipli dei casi con i numeri primi e pertanto verrebbero dimostrati implicitamente.

Come si intuisce questo semplifica enormemente il problema, perché si possono ignorare quelle equazioni che includono un valore di *n* che non sia un numero primo. Il numero delle equazioni rimanenti si riduce considerevolmente. Per esempio, per i valori di *n* fino a 20, bisogna dimostrare solo sei casi:

$$x^5 + y^5 = z^5,$$
$$x^7 + y^7 = z^7,$$
$$x^{11} + y^{11} = z^{11},$$
$$x^{13} + y^{13} = z^{13},$$
$$x^{17} + y^{17} = z^{17},$$
$$x^{19} + y^{19} = z^{19}.$$

Se si può dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat per i soli valori primi di *n*, allora il teorema risulta dimostrato per tutti i valori di *n*. Se si considerano tutti i numeri interi, allora è ovvio che essi sono infiniti. Ma se consideriamo i numeri primi, che sono soltanto una piccola frazione di tutti i numeri interi, il problema non diventa forse molto più semplice?

L'intuizione suggerirebbe che se cominciate con una quantità infinita e togliete il grosso di essa, dovrebbe restarvi una quantità finita. Purtroppo in matematica a decidere della verità non è l'intuizione, ma la logica. In realtà è possibile dimostrare che la serie dei numeri primi non ha fine. Perciò, anche se si può ignorare la grandissima quantità di equazioni relative ai valori non primi di *n*, le rimanenti equazioni relative ai valori primi di *n* sono ancora di numero infinito.

La dimostrazione che esiste un'infinità di numeri primi risale a Euclide ed è un'argomentazione classica della matematica. Inizialmente Euclide assume che c'è una serie finita di numeri primi conosciuti e poi mostra che a essa deve potersi aggiungere un numero infinito di altri membri. Nella serie finita di Euclide ci sono N numeri primi, che sono definiti $P_1, P_2, P_3 \ldots P_N$. Euclide può allora generare un nuovo numero Q_A tale che :

$$Q_A = (P_1 \times P_2 \times P_3 \times \quad \times P_N) + 1$$

Questo nuovo numero Q_A o è primo o è non primo. Se è primo allora siamo riusciti a generare un nuovo numero primo più grande e perciò la nostra serie originale dei numeri primi non era completa. D'altro canto, se Q_A non è primo, allora dev'essere divisibile perfettamente per un numero primo. Questo primo non può essere uno dei numeri primi conosciuti perché dividere Q_A per uno dei numeri primi conosciuti porterà inevitabilmente a un resto di 1. Perciò dev'esserci qualche nuovo numero primo, che possiamo chiamare P_N+1.

Siamo ora arrivati a un punto dove o QA è un nuovo numero primo oppure abbiamo un altro numero primo P_N+1. In tutti e due i modi abbiamo incrementato la nostra serie originale dei numeri primi. Ora possiamo ripetere il procedimento, includendo il nostro nuovo numero primo (P_N+1 o Q_A) nella serie e generare qualche nuovo numero Q_B. O questo nuovo numero sarà ancora un altro nuovo numero primo o dovrà esserci qualche altro nuovo numero primo P_N+2 che non appartiene alla serie nota dei numeri primi. Il senso dell'argomentazione è che, per quanto possa essere lunga la nostra serie di numeri primi, è sempre possibile trovarne uno nuovo. Perciò la serie dei numeri primi non ha termine ed è infinita.

Ma come può qualcosa che è innegabilmente più piccolo di una quantità infinita essere anch'esso infinito? Il matematico tedesco David Hilbert disse una volta: «L'infinito! Nessun'altra questione ha mai toccato così profondamente lo spirito umano; nessun'altra idea ha stimolato altrettanto fruttuosamente il suo intelletto; tuttavia nessun altro concetto ha più bisogno di essere chiarito di quello di infinito».

Hilbert contribuì a chiarire il mistero dell'infinito inventandone un esempio conosciuto come l'*Hotel Hilbert*, una definizione che illustra con chiarezza le sue strane qualità. Questo ipotetico albergo ha l'attributo auspicabile di possedere un numero infinito di stanze. Un giorno arriva un nuovo ospite ed è deluso dall'apprendere che, nonostante la dimensione infinita dell'albergo, tutte le stanze sono occupate. Hilbert, il portiere, ci pensa un po' e poi rassicura il nuovo arrivato che troverà per lui una camera vuota. Chiede a tutti gli ospiti presenti di spostarsi nella stanza successiva, in modo che chi alloggia nella camera numero 1 si sposti nella camera numero 2, chi alloggia nella 2 si sposti nella 3 e così via. Tutti gli ospiti dell'albergo continueranno ad avere una loro camera e il nuovo arrivato potrà accomodarsi nella camera 1 che è rimasta libera. Questo dimostra che infinito più uno è uguale a infinito.

La sera seguente Hilbert deve affrontare un problema assai maggiore. L'albergo è ancora pieno, quando arriva un torpedone infinitamente lungo con un numero infinito di nuovi clienti. Hilbert rimane impassibile e si frega le mani al pensiero degli infiniti conti che dovranno essere pagati all'albergo. Egli chiede a tutti i clienti già presenti di spostarsi nella stanza che ha un numero doppio rispetto al numero della camera dove attualmente soggiornano. Perciò il cliente della camera 1 si sposta nella 2, quello della 2 si sposta nella 4 e così via. Tutti i clienti che si trovavano nell'albergo conservano una camera e tuttavia un numero infinito di camere, ossia tutte quelle con il numero dispari sono state liberate per i nuovi arrivati. Questo dimostra che un doppio infinito è tuttavia uguale a infinito.

L'*Hotel Hilbert* sembra suggerirci l'idea che tutti gli infiniti hanno una grandezza equivalente, perché diversi infiniti sembrano poter alloggiare insieme nello stesso

albergo infinito: ossia l'infinito dei numeri pari può essere abbinato e posto in corrispondenza con l'infinito di tutti i numeri naturali. E tuttavia alcuni infiniti sono davvero più grossi di altri. Per esempio ogni tentativo di abbinare ogni numero razionale con ogni numero irrazionale fallisce e infatti si può dimostrare che l'insieme infinito dei numeri irrazionali è più ampio dell'insieme infinito dei numeri razionali. I matematici hanno dovuto sviluppare un sistema completo di nomenclatura per designare i diversi gradi di infinito e operare con questi concetti è uno dei temi più scottanti della matematica odierna.

Anche se l'infinità dei numeri primi infranse sul nascere le speranze di una facile dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat, la innumerevole riserva di numeri primi ha implicazioni più positive in altri ambiti come lo spionaggio e l'evoluzione degli insetti. Prima di tornare alla ricerca di una dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat vale la pena di indagare brevemente l'uso e l'abuso dei numeri primi.

La teoria dei numeri primi è una delle poche aree della matematica pura che ha trovato diretta applicazione nel mondo reale, precisamente nella crittografia. La crittografia implica la stesura in forma cifrata di messaggi segreti in maniera tale che essi possano venire decrittati solo dal ricevente e da nessun altro in caso di intercettazione. La cifratura richiede l'uso di una chiave o codice segreto e tradizionalmente la decifrazione del messaggio richiede semplicemente che il ricevente applichi in forma inversa lo stesso codice utilizzato per cifrarlo. Con tale procedura il codice crittografico è l'anello più debole nella catena di sicurezza. In primo luogo il ricevente e il mittente devono concordare sui dettagli del codice e poi scambiarsi l'informazione, correndo così dei rischi. Se il nemico riesce a intercettare il codice mentre viene scambiato, allora potrà decifrare tutti i messaggi successivi. In secondo luogo, per mantenere la sicurezza, i codici devono essere costantemente mutati e ogni volta che ciò accade esiste il rischio che il nuovo codice venga intercettato.

Il problema del codice riguarda il fatto che, se applicato in un modo, esso serve a cifrare il messaggio, mentre, applicato in modo inverso, serve a decifrarlo: le due operazioni sono altrettanto facili. Tuttavia l'esperienza ci dice che ci sono molte situazioni quotidiane in cui scomporre qualcosa è assai più difficile che comporla. Ad esempio possiamo combinare i colori della tavolozza per creare un dipinto, ma non possiamo decomporre un dipinto nei colori che lo costituiscono.

Negli anni Settanta Whitfield Diffie e Martin Hellman ebbero l'idea di trovare una procedura matematica che fosse facile da eseguire in una direzione, ma incredibilmente difficile da eseguire nel verso opposto. Una procedura simile avrebbe offerto un codice perfetto. Per esempio potrei avere un codice che consta di due parti e pubblicare la metà del codice che riguarda la cifratura dei messaggi in un elenco di pubblica consultazione. In tal modo chiunque potrebbe mandarmi messaggi cifrati, ma solo io conoscerei l'altra metà del codice che serve per decifrarli. Tutti conoscerebbero la parte del codice che riguarda la cifratura, ma essa non avrebbe rapporto alcuno con la parte del codice che serve alla decrittazione.

Nel 1977 Ronald Rivest, Adi Shamir e Léonard Adleman, un gruppo di matematici e di informatici del Massachusetts Institute of Technology si resero conto che i numeri primi erano la base ideale per ottenere una facile procedura di cifratura e una

difficile procedura di decrittazione. Per costruire il mio codice personale prenderò due numeri primi molto alti, ciascuno dei quali contenga fino a ottanta cifre, e poi li moltiplicherò insieme per ottenere un numero composto ancora più alto. Per cifrare i messaggi, basterebbe solo conoscere il numero composto così ottenuto, mentre per decrittarli bisognerebbe conoscere i due iniziali numeri primi che sono stati moltiplicati l'uno per l'altro, noti come i fattori primi. Potrei pubblicare il numero composto, ossia la parte di cifratura del codice, e tenere per me i due fattori primi, ossia la parte di decrittazione del codice. È importante notare che anche se tutti sono a conoscenza del numero composto, sarebbe estremamente difficile per chiunque scoprire i due fattori primi.

Facendo un esempio più semplice, potrei divulgare il numero composto 589, che consentirebbe a chiunque di inviarmi messaggi cifrati. Manterrei segreti i due fattori primi di 589, in modo che solo io potrei decifrare i messaggi. Se altri riuscissero a scoprire i due fattori primi, allora anch'essi potrebbero decifrare i messaggi a me indirizzati, ma persino con un numero così piccolo non è affatto ovvio quali siano i due fattori primi. In questo caso basterebbero comunque pochi minuti di lavoro con un computer da tavolo per scoprire che i fattori primi sono 31 e 19 ($31 \times 19 = 589$) e perciò il mio codice non resterebbe sicuro per molto tempo.

Ma nella realtà il numero composto che pubblicherei avrebbe più di cento cifre, che rende praticamente impossibile il compito di trovare i suoi fattori primi. Anche se i computer più potenti del mondo venissero impiegati per dividere questo enorme numero composto (il codice di cifratura) nei suoi due fattori primi (il codice di decifrazione) ci vorrebbero parecchi anni per ottenere la risposta. Perciò, per sgominare le spie nemiche, devo semplicemente cambiare il codice ogni anno. Una volta all'anno annuncerò il mio nuovo gigantesco numero composto e chiunque vorrà provare a decifrare i miei messaggi dovrà allora ricominciare daccapo a cercare con il computer i due fattori primi.

Oltre a essere stati impiegati nello spionaggio, i numeri primi appaiono anche nel mondo naturale. Le cicale periodiche, meglio note come *septendecim*, sono gli insetti con il ciclo vitale più lungo. Il loro ciclo vitale inizia sottoterra, dove le ninfe succhiano pazientemente la linfa dalle radici degli alberi. Poi, dopo diciassette anni di attesa, le cicale adulte emergono dal terreno, sciamano in gran numero e invadono temporaneamente la campagna. Poche settimane dopo si accoppiano, depongono le uova e muoiono.

La domanda che ha incuriosito i biologi era: perché il ciclo vitale della cicala è così lungo? E il fatto che tale ciclo vitale corrisponda a un numero primo di anni ha qualche rilevanza? Un'altra specie, la *Magicicada tredecim*, sciama ogni tredici anni, e dunque sembra che i cicli vitali che durano un numero primo di anni offrano un qualche vantaggio evolutivo.

Una teoria ipotizza che esista un parassita della cicala, che la cicala cerca di evitare, il quale ha un ciclo vitale lungo. Se, ad esempio, il parassita ha un ciclo vitale di due anni, allora la cicala vuole evitare un ciclo vitale che sia divisibile per due, altrimenti il parassita e la cicala si incontreranno regolarmente. Analogamente, se il parassita ha un ciclo vitale di tre anni, allora la cicala vuole evitare un ciclo vitale divisibile per tre, altrimenti il parassita e la cicala si incontreranno di nuovo con

cadenza regolare. In definitiva, per evitare di incontrare il suo parassita la miglior strategia della cicala è di avere un lungo ciclo vitale, che duri un numero primo di anni. Siccome 17 non è divisibile per alcun altro numero, la *Magicicada septendecim* raramente incontrerà il suo parassita. Se il parassita ha un ciclo vitale di due anni, si incontreranno solo ogni 34 anni e se ha un ciclo vitale più lungo, ad esempio di 16 anni, allora la cicala e il parassita si incontreranno ogni 272 (16 × 17) anni.

Per contrastare la strategia evolutiva della cicala il parassita dispone di soli due cicli vitali che accrescerebbero la frequenza delle coincidenze: il ciclo annuale e lo stesso ciclo di 17 anni della cicala. Tuttavia è improbabile che il parassita sopravviva ricomparendo ogni anno per 17 anni, perché nei primi 16 anni non avrà incontrato cicale sulle quali poter vivere da parassita. D'altro canto, per poter raggiungere un ciclo vitale di 17 anni, le generazioni di parassiti nel corso del tempo avrebbero dovuto prima svilupparsi raggiungendo un ciclo vitale di 16 anni. Questo significa che in qualche fase dell'evoluzione il parassita e la cicala non si incontrerebbero per 272 anni! In ambo i casi la cicala è protetta da un ciclo vitale che dura un numero primo di anni.

Questo potrebbe spiegare perché il supposto parassita non è stato mai trovato! Nella corsa per tenere il passo con la cicala, il parassita probabilmente è riuscito ad allungare il suo ciclo vitale fino a toccare la barriera dei 16 anni. A questo punto la sua vita non ha più coinciso con quella delle cicale per 272 anni e questo divario così elevato ha portato all'estinzione del parassita. Il risultato è una cicala con un ciclo vitale di 17 anni, di cui essa non ha più bisogno perché il suo parassita non esiste più.

Il signor Le Blanc

All'inizio del diciannovesimo secolo, l'Ultimo Teorema di Fermat si era già affermato come il problema più famigerato nella teoria dei numeri. Dopo il passo in avanti di Euler non c'erano stati ulteriori progressi, ma un annuncio sensazionale da parte di una giovane donna francese doveva ravvivare la ricerca della dimostrazione perduta di Fermat. Sophie Germain visse in un'epoca di pregiudizio maschilista e per poter condurre la sua ricerca fu costretta ad assumere una falsa identità, a studiare in condizioni terribili e a lavorare nell'isolamento intellettuale.

Nei secoli le donne erano state dissuase dallo studiare la matematica, ma nonostante la discriminazione c'erano state parecchie matematiche che avevano combattuto contro i pregiudizi consolidati e avevano scritto il loro nome a caratteri indelebili negli annali di questa disciplina. La prima donna di cui è nota la dedizione alla matematica fu Teano, vissuta nel sesto secolo a.C. che fu allieva di Pitagora per diventare poi un discepolo tra i più eminenti e infine sua moglie. Pitagora è noto come il «filosofo femminista», perché favorì le donne studiose e Teano fu soltanto una delle ventotto sorelle del Sodalizio pitagorico.

Nei secoli successivi pensatori come Socrate e Platone avrebbero continuato a invitare le donne nelle loro scuole, ma fu solo nel quarto secolo d.C. che una donna

matematica fondò una sua scuola autorevole. Ipazia, la figlia di un matematico di Alessandria, era famosa per le sue grandi doti oratorie e per essere la più brava risolutrice di problemi. Matematici che si erano arenati per mesi nel tentativo di risolvere un problema particolare le scrivevano in cerca di una soluzione e Ipazia raramente deludeva i suoi ammiratori. Era ossessionata dalla matematica e dalle procedure logico-dimostrative e quando le fu chiesto perché non avesse mai preso marito, rispose che era sposata alla verità. Infine la sua devozione alla causa del razionalismo fu all'origine della sua sventura, quando Cirillo, patriarca di Alessandria, iniziò a opprimere i filosofi, gli scienziati e i matematici, che egli definiva eretici. Lo storico Edward Gibbon dà un vivido resoconto di ciò che accadde dopo che Cirillo aveva complottato contro Ipazia e aveva sobillato le masse contro di lei:

> Un giorno fatale, nel tempo sacro della Quaresima, Ipazia venne strappata dal suo carro, denudata, trascinata in chiesa e bestialmente massacrata per mano di Pietro il Lettore e di una torma di fanatici selvaggi e spietati; le vennero strappate le carni dalle ossa con conchiglie acuminate e le sue membra tremanti vennero date alle fiamme.

Subito dopo la morte di Ipazia, la matematica entrò in un periodo di stagnazione e fu soltanto dopo il Rinascimento che un'altra donna divenne famosa come matematica. Maria Gaetana Agnesi nacque a Milano nel 1718 e, come Ipazia, fu la figlia di un matematico. Era conosciuta come una delle migliori matematiche europee, famosa in particolare per i suoi trattati sulle tangenti e sulle curve. La Agnesi studiò un particolare tipo di curva detta «versiera», una parola derivata dal latino vertere, «girare»; poiché nella lingua dell'epoca «versiera» era anche un'abbreviazione di «avversiera», che significava «moglie del diavolo», la curva studiata dalla Agnesi (la «versiera di Agnesi») venne tradotta erroneamente in inglese come «la strega di Agnesi» e questo appellativo venne usato all'epoca per riferirsi alla persona della celebre matematica.

Sebbene i matematici in tutta Europa riconoscessero l'abilità della Agnesi, molte istituzioni accademiche, in particolare l'Accademia di Francia, rifiutarono di darle un posto di ricercatrice. La discriminazione istituzionale contro le donne continuò anche in pieno ventesimo secolo quando a Emmy Noether, definita da Einstein «il più importante genio creativo della matematica prodotto fino a oggi da quando l'istruzione superiore è stata aperta alle donne», fu negata la libera docenza all'Università di Gottinga. La maggioranza della facoltà sostenne: «Come si può consentire a una donna di diventare *Privatdozent*? Dopo essere diventata *Privatdozent*, ella può diventare professore e membro del Senato accademico... Cosa penseranno i nostri soldati, quando torneranno all'Università e scopriranno che devono imparare da una donna?». David Hilbert, amico e ispiratore di Emmy, replicò: «Signori miei, non ritengo che il sesso della candidata possa essere un argomento contro la sua ammissione come *Privatdozent*. Dopo tutto, il Senato accademico non è un bagno pubblico».

In seguito, a Edmund Landau, collega di Emmy Noether, fu chiesto se lei fosse davvero una grande matematica donna. Alla domanda egli rispose: «Posso attestare che è un grande matematico, ma che sia una donna non posso giurarlo».

Oltre alle discriminazioni che dovette patire, la Noether ebbe molto in comune con altre matematiche nel corso dei secoli, come ad esempio il fatto di essere la figlia di un professore di matematica. Molti matematici di ambo i sessi provengono da famiglie di matematici, tanto che si favoleggia scioccamente dell'esistenza di un gene della matematica, ma nel caso delle donne questa percentuale è particolarmente alta. La spiegazione probabile è che la maggior parte delle donne con potenziale attitudine per la matematica non potè mai conoscere la materia né venne incoraggiata a studiarla, mentre le figlie di professori di matematica difficilmente potevano evitare di essere immerse nel mondo dei numeri. Inoltre, la Noether, come Ipazia, come la Agnesi e molte altre matematiche, non si sposò mai, in gran parte perché non era socialmente accettabile che le donne intraprendessero una simile carriera e perché erano pochi gli uomini disposti a sposare donne in una posizione così discussa. La grande matematica russa Sonia Kovalevski è un'eccezione alla regola, in quanto contrasse un matrimonio di convenienza con Vladimir Kovalevski, un uomo che accettò di intrattenere con lei una relazione platonica. Il matrimonio consentì ad ambedue di sfuggire alle loro famiglie e di concentrarsi sulle loro ricerche e nel caso di Sonia viaggiare da sola per l'Europa divenne assai più semplice nella condizione rispettabile di donna sposata.

Fra tutte le nazioni europee la Francia dimostrò l'attitudine più maschilista verso le donne istruite nella matematica, dichiarando che la matematica era inadatta alle donne e oltrepassava le loro capacità mentali. Anche se i salotti parigini giocarono un ruolo centrale nel mondo della matematica per la maggior parte del diciottesimo e del diciannovesimo secolo, solo una donna riuscì a sfuggire alle costrizioni della società francese e ad affermarsi come una grande teorica dei numeri. Sophie Germain rivoluzionò lo studio dell'Ultimo Teorema di Fermat e il suo contributo fu superiore a quello di tutti gli uomini che l'avevano preceduta.

Sophie Germain era nata il 1oaprile 1776 ed era figlia di un mercante, Ambroise-François Germain. Al di fuori della sua attività, la sua vita venne segnata dai tumulti della Rivoluzione francese: nell'anno in cui scoprì il suo amore per i numeri la Bastiglia venne demolita e il suo studio del calcolo infinitesimale fu oscurato dal Regno del Terrore. Anche se il padre era ricco, la famiglia di Sophie non apparteneva all'aristocrazia. Benché le signore del ceto sociale della famiglia Germain non fossero incoraggiate a studiare matematica, ci si aspettava che avessero una conoscenza sufficiente della materia per poterne discutere se l'argomento si fosse affacciato in qualche conversazione salottiera. Allo scopo furono scritti una serie di manuali per aiutare le giovani a conoscere gli ultimi sviluppi della matematica e della scienza. Francesco Algarotti fu autore del Newtonianismo per le dame. Poiché Algarotti riteneva che le donne fossero solo interessate alle avventure sentimentali, cercò di spiegare le scoperte di Newton attraverso un dialogo galante tra una marchesa e il suo interlocutore. Per esempio quando l'interlocutore presenta la legge dell'attrazione gravitazionale che è proporzionale all'inverso del quadrato della distanza, la marchesa dà di questa fondamentale legge fisica una sua particolare

interpretazione: «Io credo [...] che anco nell'Amore si serbi questa proporzione de' quadrati delle distanze de' luoghi, o più tosto de' tempi. Così dopo otto giorni di assenza, l'amore è divenuto sessanta quattro volte minore di quel che fosse nel primo giorno»[2].

Non c'è da sorprendersi se questo genere di libri galanti non ispirò l'interesse di Sophie per la matematica. L'episodio che mutò la sua vita avvenne un giorno quando lei, mentre curiosava nella biblioteca paterna, si imbatté nella Storia della Matematica di Jean-Etienne Montucla. Il capitolo che catturò la sua immaginazione fu quello dedicato alla vita di Archimede. Il racconto di Montucla delle scoperte di Archimede era indubbiamente interessante, ma ciò che affascinò Sophie fu soprattutto l'aneddoto della morte di Archimede. Il grande matematico e ingegnere antico aveva trascorso la sua vita a Siracusa, studiando matematica in una relativa serenità, ma quando era ormai vicino agli ottant'anni, la pace venne infranta dall'esercito romano invasore. La leggenda vuole che durante la conquista della città Archimede fosse così immerso nello studio di una figura geometrica tracciata sulla sabbia da non rispondere alla domanda postagli da un soldato romano, che, irritatosi, lo passò subito a fil di spada.

La Germain trasse la conclusione che se qualcuno poteva essere attratto da un problema geometrico fino al punto di perdere la vita, allora la matematica doveva essere l'argo-i mento più seducente che esistesse al mondo. Sophie si dispose subito a studiare gli elementi fondamentali della teoria dei numeri e del calcolo infinitesimale e presto si dedicò i allo studio delle opere di Euler e Newton, che leggeva la sera fino a ora tarda. Questo interesse improvviso in una materia così poco femminile preoccupò i suoi genitori. Un amico di famiglia, il conte Guglielmo Libri Carrucci della Somaia raccontò come il padre di Sophie le sequestrasse le candele e i vestiti e le togliesse ogni riscaldamento per scoraggiarla da quel genere di studi. Solo pochi anni dopo in Gran Bretagna, alla giovane matematica Mary Somerville vennero confiscate le candele dal padre che affermò che la figlia «deve smetterla con questo studio, oppure dovremo un giorno o l'altro legare Mary con una camicia di forza».

Nel caso di Sophie Germain, ella rispose alle intimidazioni nascondendo alcune candele e avvolgendosi nelle coperte. Libri Carrucci scrisse che le notti invernali erano così fredde che l'inchiostro si gelava nel calamaio, ma Sophie continuava il suo studio incurante di tutto. Alcuni la descrivevano come una ragazza timida e scontrosa, ma senza dubbio era anche estremamente decisa e alla fine i genitori cedettero e le permisero di coltivare i suoi studi. La Germain non si sposò mai e per tutta la sua carriera di matematica le sue ricerche vennero finanziate dal padre. Per molti anni la Germain continuò a studiare da sola perché non c'erano matematici in famiglia che potessero introdurla agli ultimi sviluppi della disciplina e i suoi precettori si rifiutavano di prenderla sul serio.

Poi, nel 1794, a Parigi venne inaugurata l' Ecole Polytechnique. Fu fondata come una scuola di altissimo livello per la formazione di matematici e scienziati al servizio della nazione francese. Sarebbe stato il posto ideale perché la Germain potesse

---

[2] Francesco Algarotti, *il Newtonianismo per le dame ovvero Dialoghi sopra la luce e i colori,* Napoli 1737, p.250.

sviluppare le sue doti matematiche, se non fosse che le donne non erano ammesse nell'istituto. La sua naturale ritrosia le impedì di affrontare il corpo docente della scuola per chiedere l'ammissione e perciò ella si decise a studiare di nascosto, assumendo l'identità di un ex studente della scuola, il signor Antoine-August Le Blanc. L'amministrazione della scuola non si accorse che il vero signor Le Blanc aveva lasciato Parigi e continuò a stampare dispense e problemi per lui. Sophie riuscì a ottenere il materiale che era destinato a Le Blanc e ogni settimana, sotto questo pseudonimo, presentava le sue soluzioni ai problemi. Tutto procedette secondo le sue intenzioni finché un paio di mesi dopo il supervisore del corso, Joseph-Louis Lagrange non potè più ignorare la genialità delle risposte del signor Le Blanc. Non solo erano mirabilmente ingegnose, ma dimostravano una trasformazione notevole in uno studente che in precedenza non si era segnalato per i suoi talenti matematici. Lagrange, che era uno dei più bravi matematici del secolo, chiese un incontro con lo studente e la Germain fu costretta a rivelare la sua vera identità. Lagrange fu sbalordito e compiaciuto di incontrare la giovane donna e divenne il suo ispiratore e amico. Sophie Germain trovò finalmente in lui un insegnante che poteva indirizzarla e al quale ella poteva mostrare apertamente le proprie capacità e ambizioni.

Sophie acquistò più fiducia in se stessa e dalla risoluzione dei problemi del suo anno di corso passò allo studio di aree inesplorate della matematica. Cosa ancor più importante, si interessò alla teoria dei numeri e inevitabilmente venne a conoscenza dell'Ultimo Teorema di Fermat. Lavorò su di esso per parecchi anni e alla fine giunse a una conclusione che le parve un importante passo in avanti. Aveva bisogno di discutere le proprie idee con un altro teorico dei numeri e decise di rivolgersi direttamente al massimo teorico dei numeri al mondo, il matematico tedesco Carl Friedrich Gauss.

Gauss è ritenuto uno dei matematici più geniali che siano mai esistiti. E.T. Bell, che aveva definito Fermat il «Principe dei dilettanti», chiamò Gauss il «Principe dei matematici». La Germain aveva conosciuto per la prima volta la sua opera studiando il suo capolavoro *Disquisitiones arithmeticae*, il trattato più importante e ampio dopo gli *Elementi* di Euclide. L'opera di Gauss influenzò ogni area della matematica, ma abbastanza stranamente egli non pubblicò nulla sull'Ultimo Teorema di Fermat. In una lettera espresse perfino disprezzo per la questione. Il suo amico, l'astronomo tedesco Heinrich Olbers, aveva scritto a Gauss esortandolo a competere per un premio che era stato offerto dall'Accademia di Parigi a chi sapesse rispondere alla sfida di Fermat: «Caro Gauss, mi sembra che tu dovresti occupartene». Due settimane dopo Gauss rispose: «Ti sono molto grato per le tue informazioni sul premio parigino. Ma ti confesso che l'Ultimo Teorema di Fermat in quanto proposizione a se stante mi interessa assai poco, perché io potrei facilmente affermare una moltitudine di proposizioni simili, che non potrebbero essere né dimostrate né confutate». L'opinione di Gauss era legittima, ma Fermat aveva chiaramente asserito che esisteva una prova e persino i successivi tentativi falliti di trovarla avevano prodotto nuove tecniche come il metodo della discesa infinita e l'adozione dei numeri immaginari. Forse negli anni precedenti Gauss aveva tentato senza riuscirci di affrontare il problema e la sua risposta a Olbers fu soltanto un caso intellettuale analogo a quello della volpe e dell'uva. Tuttavia quando egli ricevette le lettere della Germain fu

impressionato a tal punto dai risultati di lei che dimenticò per qualche tempo il suo atteggiamento ambiguo verso l'Ultimo Teorema di Fermat.

Settantacinque anni prima Euler aveva pubblicato la sua dimostrazione per il caso di $n = 3$ e da allora i matematici, compresa la Germain, avevano cercato invano di dimostrare altri casi singoli. Poi, nel 1815, la Germain adottò una nuova strategia e iniziò a lavorare su un cosiddetto approccio generale al problema. In altre parole, il suo scopo immediato non era di dimostrare un caso particolare, ma di affermare qualcosa su molti casi contemporaneamente. Nella sua lettera a Gauss ella sviluppò un calcolo che si concentrava su un particolare tipo di numero primo p, tale che 2 + 1 è anch'esso un numero primo. L'elenco dei numeri primi stilato dalla Germain comprende il 5, perché 11 ($2 \times 5 + 1$)è anch'esso primo, ma non comprende il 13, perché 27 ($2 \times 13 + 1$) non è un numero primo.

Per valori di n uguali a quelli dei numeri primi prescelti dalla Germain, ella elaborò un elegante argomento per mostrare che probabilmente non c'erano soluzioni all'equazione $x^n + y^n = z^n$. La Germain con il termine «probabilmente» intendeva che era improbabile che ci fosse qualche soluzione, perché se c'era una soluzione allora o x, y oppure z sarebbero stati un multiplo di n e questo imponeva limiti assai ristretti a qualunque soluzione. I suoi colleghi esaminarono il suo elenco di numeri primi uno dopo l'altro cercando di dimostrare che x, y oppure z non potevano essere un multiplo di n e mostrando così che per quel particolare valore di n non potevano esserci soluzioni.

Nel 1825 il suo metodo ottenne il primo completo successo grazie a Gustav Lejeune Dirichlet e Adrien-Marie Legendre, due matematici di generazioni diverse. Legendre era un uomo di settantanni che aveva attraversato il subbuglio politico della Rivoluzione francese. Il fatto che non avesse appoggiato il candidato governativo alla direzione dell'Istitut National provocò la revoca della sua pensione e quando egli diede il suo contributo all'Ultimo Teorema di Fermat era un uomo che viveva in povertà. D'altro canto Dirichlet era un giovane e brillante teorico dei numeri che aveva appena compiuto i vent'anni. Entrambi, autonomamente, poterono dimostrare che il caso di $n = 5$ non aveva soluzioni, ma essi basarono le loro dimostrazioni sul metodo elaborato da Sophie Germain, alla quale furono dunque debitori del loro successo.

Quattordici anni più tardi i francesi ottennero un altro risultato. Gabriel Lamé fece alcune aggiunte ingegnose al metodo della Germain e dimostrò il caso per il numero primo $n = 7$. La Germain aveva indicato ai teorici dei numeri come distruggere un'intera sezione di numeri primi e ora spettava agli sforzi combinati dei suoi colleghi continuare a dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat un caso alla volta.

L'opera di Sophie Germain sull'Ultimo Teorema di Fermat doveva essere il suo contributo maggiore alla matematica, ma inizialmente il merito non le venne attribuito. Quando la Germain scrisse a Gauss non aveva ancora trent'anni e sebbene a Parigi la sua reputazione fosse consolidata, ella temeva che il grand'uomo non l'avrebbe presa sul serio a causa del suo sesso. Per proteggersi la Germain ricorse ancora una volta al suo pseudonimo, firmando le lettere con il nome del signor Le Blanc.

Il suo timore e il suo rispetto per Gauss traspaiono da una delle lettere: «Purtroppo la profondità del mio intelletto non eguaglia la voracità del mio appetito e mi sento in qualche modo temerario nel disturbare un uomo di genio quando non ho altro motivo per pretendere la sua attenzione se non l'ammirazione necessariamente condivisa da tutti i suoi lettori». Gauss, inconsapevole della vera identità del suo corrispondente, cercò di metterlo a proprio agio e rispose: «Sono compiaciuto che l'aritmetica abbia trovato in lei un amico così dotato».

Il contributo della Germain poteva essere per sempre attribuito erroneamente al misterioso signor Le Blanc se non fosse stato per l'imperatore Napoleone. Nel 1806 Napoleone aveva invaso la Prussia e l'esercito francese stava conquistando una città tedesca dopo l'altra. La Germain temette che il destino di Archimede potesse ripetersi anche per un altro grande eroe della matematica ossia per Gauss e perciò spedì un messaggio al suo amico il generale Joseph-Marie Pernety, che era al comando delle forze avanzanti. Ella gli chiese di farsi garante dell'incolumità di Gauss e di conseguenza il generale trattò con particolare riguardo il matematico tedesco, spiegandogli che doveva la sua vita alla signorina Germain. Gauss fu grato ma sorpreso, perché non conosceva alcuna Sophie Germain.

Il gioco era finito. Nella lettera successiva della Germain a Gauss, ella rivelò malvolentieri la sua vera identità. Lungi dall'essere adirato per l'inganno, Gauss le rispose con gioia:

> Come esprimerle la mia ammirazione e il mio stupore nel vedere il mio stimato corrispondente signor Le Blanc trasformarsi in un personaggio illustre che dà un esempio così luminoso di ciò che io stenterei a credere. Il gusto per le scienze astratte in generale e per i misteri dei numeri in particolare è rarissimo: ma non è questo il motivo del mio stupore. Il fascino incantevole di questa scienza sublime si rivela solo a coloro che hanno il coraggio di immergersi nel suo studio. Ma quando una persona del sesso che, secondo i nostri costumi e pregiudizi, deve incontrare difficoltà infinitamente superiori a quelle degli uomini nel familiarizzare con queste scabrose ricerche, riesce nondimeno a sormontare gli ostacoli e a penetrare le parti più oscure della materia, allora senza dubbio ella deve possedere il coraggio più elevato, talenti straordinari e un genio superiore. Niente potrebbe in maniera altrettanto lusinghiera e inequivocabile fornirmi la prova che le attrattive di questa scienza, che ha arricchito la mia vita di gioie così numerose, non sono chimere quanto la predilezione di cui voi l'avete onorata.

La corrispondenza di Sophie Germain con Carl Gauss ispirò gran parte dell'attività di lei, ma nel 1808 il rapporto si interruppe bruscamente. Gauss era stato nominato professore di astronomia all'Università di Gottinga, i suoi interessi si spostarono dalla teoria dei numeri alla matematica applicata ed egli non si prese più cura di rispondere alle lettere della Germain. Senza più il suo mentore, la fiducia di lei cominciò ad affievolirsi e nel corso degli anni ella abbandonò la matematica pura.

Anche se ella non diede ulteriori contributi alla dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat, intraprese una carriera interessante come fisica, una disciplina nella quale riuscì di nuovo ad eccellere, ma solo per dover affrontare i pregiudizi delle istituzioni e della società. Il suo contributo più importante alla materia fu la

«Memoria sulle vibrazioni delle piastre elastiche», un lavoro ricco di brillanti intuizioni che getta le fondamenta della moderna teoria dell'elasticità. In seguito a questa ricerca e alla sua opera sull'Ultimo Teorema di Fermai, ricevette una medaglia dall'Institut de France e divenne la prima donna ammessa a seguire le lezioni dell'Accademia delle Scienze che non fosse moglie di uno degli accademici. Poi, verso la fine della vita ella ristabilì i rapporti con Carl Gauss, il quale ottenne che l'Università di Gottinga le assegnasse una laurea honoris causa. Tragicamente, prima che l'università potesse consegnarle l'onorificenza, Sophie Germain morì di tumore al seno.

> Tutto considerato ella fu forse la donna intellettualmente più dotata che la Francia abbia mai prodotto. E tuttavia, per quanto possa sembrare strano, quando l'ufficiale di stato civile stilò il certificato di morte di questa illustre collega e collaboratrice dei più illustri membri dell' Accademia Francese delle Scienze, la qualificò come una donna che usufruiva di una rendita annuale e non come una matematica. E questo non è tutto. Quando fu eretta la Tour Eiffel, nella quale gli ingegneri furono costretti a dedicare particolare attenzione all'elasticità dei materiali impiegati, furono scritti in questa altissima struttura i nomi di settantadue scienziati. Ma nell'elenco non si trova il nome di Sophie Germain, quella figlia geniale, le cui ricerche contribuirono così tanto all'elaborazione della teoria dell'elasticità dei metalli. Venne esclusa dall'elenco per la stessa ragione per cui la Agnesi non fu eletta membro dell'Accademia di Francia, ossia in quanto donna? Sembrerebbe di sì. Se questa fu davvero la ragione, la vergogna è ancora maggiore per coloro che si resero responsabili di tale ingratitudine verso una donna che ha meritato così bene nella scienza e che con i suoi risultati si è guadagnata un posto invidiabile nella galleria delle celebrità.
>
> H.J. Mozans, 1913

Le buste sigillate

Dopo i progressi fatti da Sophie Germain l'Accademia Francese delle Scienze offrì una serie di premi, compresa una medaglia d'oro e tremila franchi, al matematico che sarebbe finalmente riuscito a sciogliere il mistero dell'Ultimo Teorema di Fermat. Al prestigio di dimostrare il teorema si aggiungeva ora una ricompensa elevatissima per chi avesse vinto la sfida. I salotti parigini si riempirono di voci sui concorrenti, sulle loro strategie e su quanto fossero vicini al risultato finale. Poi il primo marzo 1847 all'Accademia si tenne la seduta più drammatica della sua storia.

Gli atti di quella seduta riferiscono che Gabriel Lamé, che alcuni anni prima aveva dimostrato il teorema per il caso di $n = 7$, salì sulla tribuna dinanzi ai più eminenti matematici dell'epoca e proclamò di essere sul punto di dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat. Ammise che la sua prova era ancora incompleta, ma espose il suo metodo

e annunciò compiaciuto che nelle settimane successive avrebbe pubblicato una dimostrazione completa nella rivista dell'Accademia.

L'intero uditorio rimase stupefatto, a eccezione di un solo spettatore. Appena Lamé ebbe concluso, Augustin Louis Cauchy, un altro dei più brillanti matematici parigini, chiese il permesso di parlare. Cauchy annunciò all'Accademia di aver lavorato con metodo analogo a quello di Lamé e di essere sul punto di pubblicare una dimostrazione completa.

Sia Cauchy sia Lamé si resero conto che bisognava anticipare il rivale. Chi per primo avesse presentato una dimostrazione completa avrebbe ricevuto il premio più prestigioso e prezioso nella matematica. Anche se nessuno dei due disponeva di una dimostrazione completa, i due rivali erano desiderosi in qualche modo di proclamare i loro risultati e perciò appena tre settimane dopo aver fatto il loro annuncio depositarono all'Accademia le loro dimostrazioni in buste sigillate. Questa era una procedura comune all'epoca e consentiva ai matematici di vedere registrati ufficialmente i propri scritti senza dover rivelare i dettagli del lavoro svolto. Se in seguito fosse sorta una disputa sulla paternità originaria delle soluzioni proposte, la busta sigillata avrebbe offerto la prova necessaria a stabilire la priorità.

L'attesa crebbe per tutto il mese di aprile, durante il quale sia Cauchy sia Lamé pubblicarono dettagli interessanti ma vaghi delle loro dimostrazioni negli Atti dell'Accademia. Tutta la comunità matematica anelava a conoscere la dimostrazione completa, ma molti speravano segretamente che a vincere fosse Lamé e non Cauchy. In base a tutte le testimonianze risulta infatti che Cauchy era una persona sempre pronta a credere di aver ragione, era incline al bigottismo e in generale era una figura assai sgradevole. Veniva tollerato all'Accademia soltanto per la sua intelligenza.

Poi, il 24 maggio, fu annunciata una notizia che pose fine alle congetture. A rivolgersi agli accademici non furono né Cauchy né Lamé, bensì Joseph Liouville. Liouville lasciò esterrefatti i suoi ascoltatori leggendo il contenuto di una lettera speditagli dal matematico tedesco Ernst Kummer.

Kummer era un teorico dei numeri di primissimo rango, ma per gran parte della sua carriera un ardente patriottismo alimentato dall'odio per Napoleone gli aveva impedito di seguire la sua autentica vocazione. Quando Kummer era bambino l'esercito francese invase la sua città natale di Sorau, portando un'epidemia di tifo. Il padre di Kummer era il medico della città e dopo poche settimane venne colto dal male. Traumatizzato dall'esperienza, Kummer giurò di fare tutto il possibile per difendere il suo paese da ulteriori attacchi e appena ultimati gli studi universitari dedicò le proprie energie intellettuali al problema di individuare le migliori traiettorie dei proiettili di artiglieria. Giunse infine a insegnare balistica alla scuola di guerra di Berlino.

Parallelamente alla sua carriera militare, Kummer perseguiva attivamente ricerche di matematica pura ed era perfettamente al corrente della saga in corso all'Accademia Francese. Aveva letto gli Atti dell'Accademia e analizzato i pochi dettagli che Cauchy e Lamè avevano osato rendere pubblici. A Kummer risultava ovvio che i due francesi si stavano dirigendo in un vicolo cieco ed egli espose le ragioni di questa convinzione nella lettera inviata a Liouville.

Secondo Kummer il problema fondamentale era che sia la dimostrazione di Cauchy sia quella di Lamè poggiavano su una proprietà dei numeri nota come fattorizzazione unica. Con questa espressione si intende che per un qualunque numero esiste una sola possibile combinazione di numeri primi che, moltiplicati l'uno per l'altro, danno come risultato quel numero, Per esempio, la sola combinazione di numeri primi che ci permette di ottenere il numero 18 è la seguente:

$$18 = 2 \times 3 \times 3$$

Analogamente, i numeri seguenti possono essere decomposti in fattori primi solo in un modo:

$$35 = 5 \times 7,$$
$$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5,$$
$$106.260 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 23.$$

Tale proprietà fu scoperta nel quarto secolo a.C. da Euclide , che dimostrò che essa vale per tutti i numeri naturali e descrisse la dimostrazione nel libro XI degli *Elementi*. Il fatto che la fattorizzazione unica sia vera per tutti i numeri naturali è un elemento essenziale di molte altre dimostrazioni ed è oggi conosciuto come il teorema fondamentale dell'aritmetica.

A prima vista non avrebbe dovuto esserci una ragione per la quale Cauchy e Lamé non potessero ricorrere alla fattorizzazione unica, come avevano fatto centinaia di matematici prima di loro. Purtroppo entrambe le loro dimostrazioni coinvolgevano numeri immaginari. Anche se la fattorizzazione unica è vera per i numeri reali, Kummer evidenziò che poteva non necessariamente essere vera con l'introduzione di numeri immaginari. A suo giudizio questo difetto era fatale.

Per esempio se ci limitiamo ai numeri reali allora il numero 12 può essere decomposto solo in $2 \times 2 \times 3$. Ma, se ammettiamo anche i numeri immaginari, allora il 12 può anche essere decomposto nel modo seguente:

$$12 = (1+\sqrt{-11}) \times (1-\sqrt{-11})$$

In questo caso $1 + \sqrt{-11}$ è un numero complesso, ossia una combinazione di un numero reale e di un numero immaginario. Anche se il processo di moltiplicazione è più complicato rispetto ai numeri naturali, l'esistenza di numeri complessi comporta modi aggiuntivi di decomporre 12. Un altro modo di decomporre 12 è $(2 +\sqrt{-8}) \times (2 -\sqrt{-8})$. Non esiste più una sola decomposizione in fattori primi ma piuttosto la scelta tra diverse decomposizioni.

La perdita della fattorizzazione unica nuoceva severamente alle dimostrazioni di Cauchy e di Lamé, ma non le distruggeva del tutto. Essi intendevano dimostrare che non c'erano soluzioni per l'equazione $x^n + y^n = z^n$ laddove n rappresenta qualunque numero maggiore di 2. Come abbiamo già visto in questo capitolo, è sufficiente che la dimostrazione funzioni per i valori primi di n. Kummer dimostrò che, impiegando altre tecniche era possibile fare a meno della fattorizzazione unica per diversi valori di n. Per esempio, il problema della fattorizzazione unica poteva essere aggirato per tutti i numeri primi fino a $n = 31$ incluso. Tuttavia il numero primo $n = 37$ presentava difficoltà. Fra i numeri primi inferiori a 100 altri due, $n = 59$ e $n = 67$,

rappresentavano casi difficili. Questi cosiddetti primi irregolari, che sono sparsi fra i rimanenti numeri primi, erano ora l'intoppo da rimuovere per arrivare a una dimostrazione completa.

Kummer evidenziò che non esistevano procedure matematiche note che potessero servire a sbarazzarsi di questi primi irregolari in un colpo solo. Tuttavia egli credeva che, Sviluppando con accuratezza tecniche adeguate per ogni Ringoio numero primo irregolare, si sarebbe potuto affrontarli uno per uno. Sviluppare queste tecniche ad hoc sarebbe stato un esercizio lento e penoso e cosa ancora peggiore i numeri primi irregolari sono anch'essi infiniti. Affrontarli tutti individualmente avrebbe occupato la comunità dei matematici fino alla fine dei tempi.

La lettera di Kummer ebbe un effetto devastante su Lamé. Con il senno di poi egli si rese conto che l'assunto della fattorizzazione unica era nel migliore dei casi troppo ottimistico e nel peggiore dei casi sconsiderato. Lamé capì che se avesse svolto le sue ricerche dialogando maggiormente con i colleghi, avrebbe potuto individuare l'errore assai prima e scrisse al suo collega Dirichlet a Berlino: «Se solo tu fossi stato a Parigi o io fossi stato a Berlino, tutto questo non sarebbe successo».

Mentre Lamé si sentì umiliato, Cauchy rifiutò di accettare la sconfitta. Egli riteneva che, paragonata alla dimostrazione di Lamé, la sua fosse meno dipendente dalla fattorizzazione unica e che finché l'analisi di Kummer delle classi dei numeri non fosse stata pienamente verificata esisteva la possibilità che essa potesse risultare erronea. Per diverse settimane Cauchy continuò a pubblicare articoli sull'argomento, ma alla fine dell'estate anche lui ammutolì.

Kummer aveva mostrato che una dimostrazione completa dell'Ultimo Teorema di Fermat era al di là delle impostazioni matematiche allora correnti. Era un esempio intelligente di ragionamento matematico, ma rappresentava un colpo durissimo per tutta una generazione di matematici che avevano sperato di poter risolvere il più difficile problema della storia della loro disciplina.

La situazione venne ricapitolata da Cauchy, che nel 1857 scrisse la relazione conclusiva dell'Accademia in merito al premio bandito per la dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat:

> Relazione sul concorso per il Gran Premio nelle scienze matematiche. Già bandito nel 1853 e prorogato al 1856.
>
> Alla segreteria sono state presentate undici memorie. Ma nessuna ha risolto la questione proposta. Perciò, dopo che il premio è stato prorogato per molto tempo, la questione resta al punto in cui l'ha lasciata il signor Kummer. Tuttavia le scienze matematiche dovrebbero rallegrarsi per i lavori intrapresi dai geometri, nel loro desiderio di risolvere la questione, specialmente dal signor Kummer; e i commissari pensano che l'Accademia prenderebbe una decisione utile e onorevole se, ritirando la questione dal concorso, aggiudicasse la medaglia al signor Kummer, per le sue bellissime ricerche sui numeri complessi composti dalle radici dell'unità e dai numeri interi.

Per più di due secoli ogni tentativo di riscoprire la dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat era fallito. Durante l'adolescenza Andrew Wiles aveva studiato

l’opera di Euler, della Germain, di Cauchy, di Lamé e infine di Kummer. Egli sperava di poter imparare dai loro errori, ma quando si iscrisse come studente all’Università di Oxford si trovò davanti allo stesso muro che aveva bloccato Kummer.

Alcuni coetanei di Wiles cominciarono a sospettare che il problema potesse essere impossibile. Forse Fermat li aveva ingannati e dunque la ragione per la quale nessuno aveva riscoperto la sua dimostrazione era che quella dimostrazione non esisteva. Nonostante questo scetticismo Wiles continuò a cercare una dimostrazione. Era sospinto dalla consapevolezza che in passato si erano dati molti casi di dimostrazioni che erano state finalmente scoperte solo dopo secoli di tentativi. E in alcuni di quei casi l’intuizione brillante che aveva risolto il problema non si era basata sui nuovi sviluppi della matematica; al contrario la dimostrazione poteva essere trovata anche molto tempo prima.

Era possibile che tutte le tecniche richieste per dimostrare l’Ultimo Teorema di Fermat fossero disponibili e che il solo ingrediente mancante fosse l’ingegnosità. Wiles non era disposto a rinunciare: trovare una dimostrazione del teorema non era più una curiosità infantile, ma si era trasformato in un’ossessione vera e propria. Dopo aver appreso tutto quello che c’era da apprendere sulla matematica dell’Ottocento, Wiles decise di munirsi delle tecniche del ventesimo secolo.

4
DENTRO L'ASTRAZIONE

La dimostrazione è un idolo davanti al quale il matematico si tortura.
Sir Arthur Eddington

A seguito dell'opera di Ernst Kummer le speranze di trovare una dimostrazione per l'Ultimo Teorema sembravano sempre più deboli. Inoltre la matematica stava prendendo una nuova direzione e c'era il rischio che la nuova generazione di matematici avrebbe ignorato quello che sembrava un problema impossibile, ormai arenatosi in un vicolo cieco. All'inizio del ventesimo secolo il problema era ancora ben presente ai teorici dei numeri, ma essi trattavano l'Ultimo Teorema di Fermat con lo stesso atteggiamento con cui i chimici guardavano all'alchimia. Entrambi erano i folli sogni di un'età passata.

Poi nel 1908 Paul Wolfskehl, un industriale tedesco di Darmstadt, fece rivivere il problema. La famiglia Wolfskehl era famosa per la sua ricchezza e per il mecenatismo nei confronti delle arti e delle scienze, e Paul non faceva eccezione. Aveva studiato matematica all'università e, sebbene avesse dedicato la maggior parte della sua vita a costruire l'impero commerciale della famiglia, manteneva contatti con matematici di professione e continuava a interessarsi della teoria dei numeri. In particolare Wolfskehl si rifiutava di rinunciare a dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat.

Wolfskehl non era affatto un matematico molto dotato e non era destinato a dare un contributo rilevante alla ricerca di una prova per l'Ultimo Teorema. Tuttavia, grazie a una curiosa catena di avvenimenti, il suo nome dovette rimanere associato per sempre al problema di Fermat ed egli stimolò migliaia di altre persone a raccogliere la sfida.

La storia inizia con l'ossessione di Wolfskehl per una bella donna, di cui non si conobbe mai la vera identità. Purtroppo per lui, la donna misteriosa lo rifiutò ed egli precipitò in un tale sconforto da decidere di suicidarsi. Era un uomo appassionato, ma non impetuoso e pianificò la propria morte con cura meticolosa. Fissò una data per il suicidio e decise che si sarebbe sparato una pallottola alla tempia allo scoccare della mezzanotte. Nei giorni restanti sistemò tutti gli affari pendenti e nella data fatale scrisse il suo testamento e alcune lettere per gli amici più cari e per la famiglia.

Wolfskehl era stato così efficiente da completare tutto prima della mezzanotte. Perciò per ingannare il tempo, andò in biblioteca e cominciò a sfogliare pubblicazioni matematiche. Dopo poco si immerse nella lettura del classico, lavoro di Kummer che analizzava il fallimento di Cauchy e Lamé. Era uno dei calcoli più imponenti di quell'epoca ed era certo una lettura appropriata per gli ultimi momenti di un

matematico in vena di suicidarsi. Wolfskehl seguì il ragionamento rigo dopo rigo e all'improvviso rimase stupefatto da quella che gli sembrava una lacuna logica: Kummer aveva assunto un presupposto senza giustificarlo. Wolfskehl si chiese se aveva scoperto un grave errore o se l'assunzione di Kummer fosse giustificata. Se era vero il primo caso, allora si riaffacciava la speranza che dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat sarebbe potuto essere molto più facile di quanto molti avessero presunto.

Wolfskehl si sedette, esaminò il passaggio apparentemente debole della dimostrazione di Kummer e si impegnò a sviluppare una piccola dimostrazione che avrebbe o confermato il lavoro di Kummer o provato che la sua assunzione era sbagliata, nel qual caso tutto il lavoro veniva invalidato. All'alba la sua dimostrazione era completa. La brutta notizia, per quanto riguardava la matematica, era che la dimostrazione di Kummer era stata corretta e confermata e che l'Ultimo Teorema restava confinato nella sfera dell'inattingibile. La buona notizia era che l'ora fissata per il suicidio era passata e Wolfskehl era cosi fiero di aver scoperto e corretto una lacuna nell'opera del grande Ernst Kummer che la sua disperazione e il suo sconforto si dileguarono. La matematica aveva rianimato il suo desiderio di vivere.

Wolfskehl stracciò le lettere di addio e riscrisse il testamento alla luce di quanto accaduto quella notte. Alla sua morte nel 1908 venne letto il nuovo testamento e la famiglia Wolfskehl rimase sbalordita scoprendo che Paul aveva destinato una bella quota del suo patrimonio come premio da assegnare a chiunque fosse riuscito a dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat. La ricompensa di centomila marchi, pari a circa tre miliardi di lire del giorno d'oggi, era il suo modo di ripagare il debito verso l'enigma che gli aveva salvato la vita.

Il denaro venne affidato alla *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften* (Regia Società delle Scienze) di Gottinga, che bandì ufficialmente il concorso per il premio lo stesso anno:

In base ai poteri conferitici dal dottor Paul Wolfskehl, deceduto a Darmstadt, istituiamo un premio di centomila marchi, da assegnarsi a colui che per primo dimostrerà il grande teorema di Fermat.

Il concorso è regolato come segue:

> (1) La Königliche Gesellschaft der Wissenschaften di Gottinga deciderà in assoluta libertà a chi debba essere conferito il Premio. Verrà rifiutato ogni manoscritto redatto al solo scopo di partecipare al concorso per vincere il Premio. Saranno presi in considerazione solo quegli scritti matematici comparsi sotto forma di monografia sui periodici o venduti in libreria. La Società chiede agli autori di tali scritti di inviare almeno cinque copie a stampa.
>
> (2) Le opere pubblicate in una lingua ignota agli specialisti scelti per formare la giuria saranno escluse dal concorso. Agli autori di tali opere sarà consentito di sostituirle con traduzioni la cui fedeltà all'originale sia garantita.
>
> (3) La Società declina ogni responsabilità per l'esame di opere non sottoposte alla sua attenzione come pure per gli errori che potrebbero risultare dal fatto che l'autore di un'opera o di parte di un'opera siano ignoti alla Società.

(4) La Società mantiene il diritto di decisione nel caso in cui diverse persone abbiano ottenuto la soluzione del problema o nel caso in cui la soluzione sia il risultato degli sforzi congiunti di diversi studiosi, in particolare per ciò che concerne la suddivisione del Premio.

(5) L'assegnazione del Premio da parte della Società non avverrà prima che siano trascorsi due anni dalla pubblicazione dello scritto che è stato premiato. Questo intervallo di tempo ha lo scopo di consentire ai matematici tedeschi e stranieri di esprimere la propria opinione sulla validità della soluzione pubblicata.

(6) Appena il Premio sarà conferito dalla Società, il premiato verrà informato dalla segreteria, a nome della Società; il risultato verrà reso pubblico dovunque il Premio era stato annunciato l'anno precedente. L'assegnazione del Premio da parte della società non sarà oggetto di ulteriore discussione.

(7) Il pagamento del Premio al vincitore avverrà nei tre mesi successivi all'assegnazione da parte del regio Tesoriere dell'Università di Gottinga o, a rischio del ricevente, in ogni altro luogo da lui designato.

(8) Il capitale potrà essere consegnato contro ricevuta intestata alla Società o in denaro o sotto forma di titoli finanziari. Il pagamento del Premio sarà considerato avvenuto attraverso il trasferimento di tali titoli finanziari, quand'anche il loro valore totale nel giorno del trasferimento non eguagli la cifra di 100.000 marchi.

(9) Se il Premio non sarà stato assegnato entro il 13 settembre 2007, nessuna richiesta successiva sarà accolta.

Il concorso per il Premio Wolfskehl è aperto in data odierna alle condizioni di cui sopra.

Gottinga, 27 giugno 1908
Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften

Val la pena di notare che anche se il Comitato avrebbe assegnato centomila marchi al primo matematico che avesse dimostrato che l'Ultimo Teorema di Fermat era vero, non avrebbe assegnato neppure un centesimo a chiunque avesse dimostrato che il teorema era falso.

Il Premio Wolfskehl venne annunciato in tutte le riviste matematiche e notizia del concorso si diffuse rapidamente in tutta Europa. Nonostante la campagna pubblicitaria e l'incentivo di un premio enorme, il Comitato Wolfskehl non riuscì a suscitare un grande interesse fra i matematici seri. La maggioranza dei matematici di professione considerava l'Ultimo Teorema di Fermat una causa persa e decise di non sprecare la propria carriera lavorando dietro i vaneggiamenti di uno sciocco. Tuttavia, il premio ebbe l'effetto di far conoscere il problema a un nuovo pubblico, a una schiera di menti desiderose di applicarsi alla soluzione di quest'ultimo enigma e pronte ad affrontarlo seguendo strade assolutamente inedite.

L'epoca dei rompicapi, dei quesiti e degli enigmi

Sin dall'epoca dei greci, i matematici hanno cercato di rendere più gradevoli i loro testi, formulando dimostrazioni e teoremi nella forma di soluzioni a enigmi numerici. Nella seconda metà dell'Ottocento questo modo divertente di affrontare la materia si diffuse nella stampa popolare e i quesiti matematici trovarono il loro posto accanto alle parole crociate e agli anagrammi. Naturalmente un pubblico sempre più numeroso si interessò ai rompicapi matematici, che per i dilettanti comprendevano tutto, dai quesiti più banali a profondi problemi matematici come l'Ultimo Teorema di Fermat.

Forse il più prolifico creatore di enigmi fu Henry Dudeney, che collaborò a decine di giornali e riviste, compresi *Strand, Cassell's, Queen, Tit-Bits, Weekly Dispatch e Blighty*. Un altro dei grandi enigmisti dell'età vittoriana fu il reverendo Charles Dodgson, docente di matematica al Christ Church di Oxford, più noto con il suo nome di scrittore: Lewis Carroll. Il reverendo Dodgson dedicò parecchi anni alla compilazione di un compendio gigantesco di enigmi, intitolato *Curiosa Mathematica*, e sebbene non completò l'opera, scrisse diversi volumi, tra i quali *Pillow Problems*[3]

Il più grande enigmista fu il prodigio americano Sam Loyd (1841-1911), che sin dall'adolescenza ricavò consistenti profitti dall'inventare nuovi enigmi e dal trasformare i vecchi. In *Sam Loyd and his Puzzles: An Autohiographical Review* egli ricorda di aver creato alcuni dei suoi primi enigmi per il prestigiatore circense P.T. Barnum:

> Molti anni fa, quando il Circo Barnum era davvero «il più grande spettacolo sulla terra», il famoso intrattenitore mi chiese di inventare per lui una serie di giochi a premio per fini pubblicitari. Essi divennero molto noti come «Gli enigmi della Sfinge», a causa degli alti premi offerti a chiunque fosse in grado di risolverli.

Stranamente questa autobiografia fu scritta nel 1928, diciassette anni dopo la morte di Loyd. Loyd aveva trasmesso la sua astuzia al figlio, che si chiamava anche lui Sam, il quale era il vero autore del libro e sapeva benissimo che tutti gli acquirenti avrebbero erroneamente presunto che il testo fosse stato scritto dal famoso Sam Loyd Senior.

La più famosa creazione di Loyd fu l'equivalente vittoriano del cubo di Rubik, il «gioco del quindici» che ancora oggi si trova nei negozi di giocattoli. Quindici tessere numerate sono disposte su quattro file di quattro posti ciascuna cosicché uno spazio resta sempre vuoto. Lo scopo è di disporre le tessere nella corretta sequenza numerica dall'1 al 15 facendole scorrere grazie all'apposito spazio vuoto che

[3] Letteralmente «Problemi del Cuscino», ossia quesiti da risolvere a letto, prima di addormentarsi o al risveglio. [N.d.T.]

permette di spostarle. Questo «gioco del quindici» inventato da Sam Loyd veniva venduto nella disposizione delle tessere mostrata nella figura 4.1 e l'inventore offriva un premio Consistente a chiunque potesse completare l'ordine invertendo le posizioni del 14 e del 15 attraverso gli opportuni spostamenti. Il figlio di Loyd descrisse l'interesse suscitato da questo enigma così tangibile eppure di carattere essenzialmente matematico:

Figura 4.1: Una vignetta che ironizza sulla mania suscitata dal «gioco del quindici» di Sam Loyd.

> Un premio di mille dollari, offerto per la prima corretta soluzione del problema, non venne mai reclamato, anche se migliaia di persone affermano di essere riuscite nell'impresa. La gente si infatuò per questo gioco e si narrano storie divertenti di negozianti che trascuravano di aprire le loro botteghe; di un distinto reverendo che rimase sotto un lampione al bordo della strada per tutta una notte d'inverno cercando di ricordare il modo in cui era riuscito a risolvere il gioco. L'aspetto misterioso di questo gioco è che nessuno sembra in grado di ricordare la sequenza delle mosse per essere sicuro di riuscire a risolvere l'enigma. Si narra di timonieri che hanno fatto naufragare le loro imbarcazioni e di macchinisti che non si sono fermati con il treno alla stazione presi com'erano dal gioco. Un famoso editore di Baltimora racconta di quando si assentò per il pranzo e fu scoperto dai suoi affannati collaboratori dopo mezzanotte, mentre girava le tessere sulla lavagnetta!

Loyd fu sempre sicuro di non dover mai pagare il premio di mille dollari, perché sapeva che era impossibile cambiare di posto due tessere senza distruggere in altri punti la sequenza numerica. Allo stesso modo in cui un matematico può dimostrare che una particolare equazione non ha soluzioni, Loyd potè dimostrare che il suo «gioco del quindici» è insolubile.

(a) $D_P = 0$ **(b)** $D_P = 6$ **(c)** $D_P = 12$

Figura 4.2: Facendo scorrere le tessere è possibile creare varie disposizioni disordinate. Per ognuna di esse è possibile misurare il coefficiente di disordine attraverso il parametro di disordine D_P

La dimostrazione di Loyd iniziò con la definizione di una quantità che misurava il disordine del gioco, ossia il parametro di disordine D_P . Il parametro di disordine per ogni disposizione delle tessere è dato dal numero delle coppie di tessere che si trovano in posizione sbagliata relativamente alla loro reciproca sequenza numerica. Dunque, quando l'enigma è risolto, come mostrato nella figura 4.2(a), $D_P = 0$ perché nessuna tessera si trova nel posto sbagliato.

Cominciando con tutte le tessere in ordine e facendole poi scorrere è relativamente facile ottenere la disposizione mostrata nella figura 4.2(b). Le tessere sono nell'ordine giusto fino alla numero 10 inclusa. Ovviamente la numero 11 dovrebbe venire prima della 12 e dunque queste due tessere sono in posizione sbagliata. La serie completa delle coppie di tessere che sono in posizione errata è la seguente: (12,11), (15, 13), (15, 14), (15, 11), (13, 11) e (14, 11). Siccome in questa disposizione ci sono sei coppie di tessere in posizione sbagliata, $D_P = 6$ (Notate che la tessera 10 e la tessera 12 pur essendo l'una vicino all'altra in una posizione chiaramente sbagliata in relazione alla lavagna, non si trovano nell'ordine sbagliato quanto alla loro sequenza numerica. Pertanto questa coppia di tessere non entra nel calcolo del parametro di disordine.)

Dopo ulteriori scorrimenti arriviamo alla disposizione della figura 4.2(c). Se compilate un elenco delle coppie di tessere che sono nell'ordine sbagliato, scoprirete che $D_P = 12$. La cosa importante da notare è che in tutti questi casi (a), (b) e (e), il valore del parametro di disordine è sempre un numero pari (0, 6 e 12). In effetti se voi iniziate il gioco con le tessere nell'ordine giusto e poi procedete a risistemarle, questa asserzione risulta sempre vera. Ogni qual volta il quadrato vuoto si trova nell'angolo di destra dell'ultima fila in basso, ogni scorrimento di tessere produrrà sempre un valore pari di D_P . Il valore pari del parametro di disordine è una proprietà intrinseca di ogni disposizione che deriva dall'originaria disposizione corretta. In matematica una proprietà che risulta sempre vera qualunque cosa accada all'oggetto a cui si riferisce viene definita *invariante*.

Tuttavia, se esaminate la disposizione in cui il gioco fu venduto da Loyd, nella quale il (14 e il 15) sono scambiati di posto, il valore del parametro di disordine è uno, $D_P = 1$, ossia la sola coppia di tessere in ordine sbagliato è la 14, 15. Per la disposizione escogitata da Loyd il parametro di disordine ha un valore dispari! Noi sappiamo però che per ogni disposizione derivata dalla disposizione iniziale corretta

il parametro di disordine ha un valore pari. La conclusione è che la disposizione di Loyd non può essere derivata dalla disposizione corretta e, viceversa, è impossibile passare dalla disposizione di Loyd alla disposizione giusta delle tessere: dunque il premio di mille dollari promesso da Loyd restava al sicuro nelle sue tasche.

L'enigma di Loyd e il parametro di disordine dimostrano il potere di un invariante. Le proprietà invarianti offrono ai matematici una efficace strategia per dimostrare che è impossibile trasformare un oggetto matematico in un altro oggetto. Per esempio attualmente un'area della matematica che suscita molto interesse è lo studio dei nodi e naturalmente i teorici dei nodi sono interessati a dimostrare se un nodo può o non può essere trasformato in un altro nodo con movimenti di torsione e di incrocio, ma senza tagliarlo. Per rispondere a queste domande, essi cercano di trovare una proprietà del primo nodo che non possa andare distrutta ,per quanti attorcigliamenti e incroci si facciano: un invariante del nodo. Quindi essi calcolano la stessa proprietà per il secondo nodo. Se i valori sono diversi, si conclude che dev'essere impossibile passare dal primo nodo al secondo.

Fino all'invenzione di questa tecnica, avvenuta negli anni Venti a opera di Kurt Reidemeister era impossibile dimostrare che un nodo non può essere trasformato in qualche altro nodo. In altre parole prima che fossero scoperti gli invarianti dei nodi era impossibile dimostrare che un nodo al rovescio è fondamentalmente diverso da un nodo diritto, da un nodo semplice o persino da un semplice anello senza nodo alcuno. Il concetto di proprietà invariante è centrale per molte altre dimostrazioni matematiche e, come vedremo nel capitolo 5, si dimostrerà cruciale nel riportare l'Ultimo Teorema di Fermat al centro degli studi matematici.

Alla fine del secolo, grazie a personaggi come Sam Loyd e al suo gioco del quindici, si affacciarono in tutta Europa e in America milioni di dilettanti nella risoluzione dei problemi, sempre avidi di nuove e più impegnative prove. Quando la notizia del lascito di Wolfskehl raggiunse questi matematici in erba, l'Ultimo Teorema di Fermat tornò a essere il più famoso problema matematico al mondo. L'Ultimo Teorema era infinitamente più complesso degli enigmi anche più ostici inventati da Loyd, ma il premio era assai superiore. I dilettanti sognavano di poter trovare una soluzione relativamente semplice sfuggita ai grandi professori del passato. Il dilettante appassionato del ventesimo secolo, quanto a conoscenza delle tecniche matematiche, si trovava in larga misura su un piede di parità rispetto a Fermat. La sfida era di mostrarsi all'altezza della creatività con la quale Fermat adoperava le sue tecniche.

Dopo poche settimane dall'annuncio, nonostante che secondo il regolamento il premio fosse riservato solo alle opere a stampa, una valanga di manoscritti furono spediti all'Università di Gottinga. Non c'è da sorprendersi che tutte le dimostrazioni fossero fallaci. Anche se ogni concorrente era persuaso di aver risolto un problema plurisecolare, tutti avevano commesso errori logici talvolta grossolani e talvolta sottili. La teoria dei numeri è un'arte così astratta che è paurosamente facile deviare dal sentiero della logica e scivolare del tutto inconsapevolmente lungo la china dell'assurdo. L'appendice 6 mostra un tipo classico di errore che può essere facilmente compiuto da un dilettante entusiasta.

A prescindere dall'identità degli autori, tutte le dimostrazioni vennero scrupolosamente vagliate nel caso che un dilettante sconosciuto si fosse imbattuto nella prova più ricercata di tutta la matematica. Il direttore del dipartimento di matematica all'Università di Gottinga fra il 1909 e il 1934 fu il professor Edmund Landau e fu sua la responsabilità di esaminare le prove dei concorrenti al Premio Wolfskehl. Landau si rese conto che la sua attività di ricerca veniva continuamente interrotta dalla necessità di studiare le decine di confuse dimostrazioni che arrivavano ogni mese sulla sua scrivania. Per affrontare la situazione inventò un metodo assai semplice di sbrigare il carico di lavoro. Il professore fece stampare centinaia di biglietti sui quali era scritto:

> Egregio Signor...
> Grazie per il suo manoscritto sulla dimostrazione
> dell'Ultimo Teorema di Fermat.
> Il primo errore si trova a:
> pagina... riga...
> Questo invalida la dimostrazione.
> Professor E.M. Landau.

Landau consegnava quindi ogni nuovo testo insieme con uno di questi biglietti a qualche suo studente, chiedendogli di riempire il biglietto a seconda dell'errore scovato nella dimostrazione.

I manoscritti continuarono ad arrivare con la stessa frequenza per anni, nonostante che il Premio Wolfskehl si fosse notevolmente svalutato a seguito della superinflazione successiva alla prima guerra mondiale. Qualcuno ha detto che chiunque vincesse oggi il premio avrebbe appena i soldi sufficienti per comprarsi un caffè, ma queste sono esagerazioni. Una lettera scritta dal dottor F. Schlichting, responsabile dell'esame dei manoscritti dei concorrenti durante gli anni Settanta, spiega che il premio valeva allora più di diecimila marchi. La lettera, indirizzata a Paulo Ribenboim e pubblicata nel libro di Ribenboim *13 Lectures on Fermat's Last Theorem* dà un'idea precisa del lavoro del comitato Wolfskehl:

> Egregio Signore,
>
> non abbiamo tenuto il conto di tutte le «soluzioni» presentate fino a oggi. Solo nel primo anno (1907-1908) seicentoventuno soluzioni vennero registrate negli archivi dell'Accademia, dove la corrispondenza relativa al problema di Fermat occupa circa tre metri. Nei decenni più recenti abbiamo selezionato il materiale in questo modo: la segreteria dell'Accademia divide i manoscritti in arrivo in due categorie:
>
> (1) stupidaggini assolute, che vengono rispedite indietro all'istante;
>
> (2) materiale che ha una qualche parvenza di serietà matematica.
>
> Questo secondo gruppo viene consegnato al dipartimento di matematica, dove la lettura, la scoperta degli errori e la risposta ai concorrenti vengono demandate a uno degli assistenti scientifici (nelle università tedesche si tratta di studenti laureati che lavorano alla loro tesi di dottorato) e al momento io sono la vittima. Ogni mese bisogna rispondere ad almeno tre o quattro lettere, talune delle quali

includono stranezze e curiosità; ad esempio qualcuno invia la prima parte della soluzione e promette la seconda solo dopo il pagamento anticipato da parte nostra di mille marchi; un altro, mi ha promesso l'un per cento dei suoi profitti a seguito dei diritti editoriali e radiotelevisivi che avrebbe maturato diventando famoso, se io lo avessi appoggiato adesso; in caso contrario, minacciava di inviare la dimostrazione a un dipartimento di matematica russo per privarci della gloria della scoperta. Di tanto in tanto a Gottinga compare qualcuno che insiste per essere ricevuto e discutere personalmente il problema.

Quasi tutte le «soluzioni» sono di livello molto basso (concepite con la cultura matematica della scuola media superiore e forse dopo aver letto senza comprenderlo bene, qualche testo sulla teoria dei numeri), e tuttavia possono risultare assai complicate da capire. Socialmente, i concorrenti sono spesso persone di formazione tecnica, ma con una carriera fallita che cercano il successo dimostrando il problema di Fermai. Ho consegnato alcuni manoscritti a dei medici che hanno diagnosticato casi gravi di schizofrenia.

Una clausola del testamento di Wolfskehl era che l'Accademia dovesse pubblicare ogni anno l'annuncio del premio in molte riviste matematiche. Ma già dopo i primi anni i periodici si rifiutarono di pubblicare l'annuncio, perché venivano subissati di lettere e manoscritti deliranti.

Spero che le informazioni che le ho dato siano di Suo interesse.

Distinti saluti
F. Schlichting

Come accenna Schlichting i concorrenti non si limitavano a spedire le loro «soluzioni» all'Accademia di Gottinga. Forse in ogni dipartimento di matematica nel mondo, nascosto in un angolo della biblioteca, c'è uno scaffale di presunte dimostrazioni del teorema concepite da dilettanti. La maggioranza degli istituti ignorano queste dimostrazioni dilettantesche, altri hanno escogitato modi più fantasiosi per sbarazzarsene. Lo scrittore di matematica Martin Gardner ricorda un suo amico che rispondeva con un biglietto nel quale si dichiarava incompetente a esaminare la dimostrazione. Tuttavia forniva il nome e l'indirizzo di un esperto che avrebbe potuto essere d'aiuto: i dati che lui forniva erano quelli dell'ultimo dilettante che gli aveva inviato una dimostrazione. Un altro suo amico rispondeva scrivendo: «Dispongo di una eccellente confutazione della sua tentata dimostrazione, ma purtroppo questa pagina non è abbastanza larga per contenerla».

Anche se i dilettanti di matematica di tutto il mondo hanno cercato senza successo per tutto il secolo di dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat e di vincere il Premio Wolfskehl, i professionisti hanno continuato largamente a ignorare il problema. Invece di lavorare sull'opera di Kummer e degli altri teorici dei numeri ottocenteschi, i matematici iniziarono a esaminare i fondamenti della loro disciplina per affrontare questioni essenziali riguardo ai numeri. Alcune tra le più grandi figure del ventesimo secolo quali Bertrand Russell, David Hilbert e Kurt Gödel hanno cercato di capire le più profonde proprietà dei numeri per cogliere il loro vero significato e scoprire a quali domande la teoria dei numeri può e, fatto ancor più rilevante, non può

rispondere. La loro opera avrebbe scosso le fondamenta della matematica e infine avrebbe avuto ripercussioni sull'Ultimo Teorema di Fermat.

I fondamenti della conoscenza

Per centinaia di anni i matematici si sono impegnati a sviluppare dimostrazioni logiche per passare dal noto all'ignoto. I progressi sono stati fenomenali e ogni nuova generazione ha ampliato la grande struttura del sapere matematico, creando nuovi concetti di numero e di spazio. Verso la fine del diciannovesimo secolo, però, i logici matematici invece di guardare avanti iniziarono a guardare indietro verso le fondamenta della matematica sulle quali poggiava tutta la costruzione. Volevano verificare i fondamenti della matematica e ricostruire rigorosamente tutto dai primi principi per accertarsi che quei primi principi fossero affidabili.

I matematici sono noti per l'ostinazione con la quale esigono una dimostrazione assoluta prima di accettare qualunque asserzione. La loro reputazione viene descritta con chiarezza in un racconto riportato da lan Stewart in *Concepts of Modern Mathematics:*

> Si narra che un astronomo, un fisico e un matematico fossero in vacanza in Scozia. Guardando dal finestrino di un treno, scorsero una pecora nera in mezzo a un prato. «Interessante», osservò l'astronomo. «Tutte le pecore scozzesi sono nere!» A ciò il fisico replicò: «No, no! *Alcune* pecore scozzesi sono nere!». Il matematico alzò gli occhi verso il cielo con espressione compassionevole e poi intonò: «In Scozia esiste almeno un campo, che contiene almeno una pecora, *un lato almeno della quale è nero*».

Ancor più rigorosi dei comuni matematici sono quei matematici che si specializzano nello studio della logica matematica. I logici matematici iniziarono a porre in dubbio idee che gli altri matematici avevano dato per scontate da secoli. Per esempio, la legge della tricotomia afferma che ogni numero è o negativo, o positivo o zero. Sembra una legge ovvia e i matematici l'avevano tacitamente accolta come vera: nessuno si era mai preso la briga di dimostrare che fosse davvero così. I logici capirono che, fino a che la legge della tricotomia non fosse stata dimostrata, essa avrebbe potuto essere falsa e se così stavano le cose allora un intero edificio della conoscenza, tutto ciò che poggiava su quella legge, sarebbe crollato. Fortunatamente per la matematica, la legge della tricotomia fu dimostrata alla fine del secolo scorso.

Sin dagli antichi greci, la matematica aveva accumulato in misura sempre maggiore teoremi e verità e sebbene gran parte di essi fosse stata rigorosamente dimostrata, i matematici temevano che alcuni, come la legge della tricotomia, fossero entrati di soppiatto nel sapere matematico senza essere stati adeguatamente esaminati. Alcune idee erano diventate parte del patrimonio comune e tuttavia nessuno era

davvero certo di come fossero state originariamente dimostrate e neppure se davvero lo fossero state. I logici decisero di dimostrare ogni teorema dai primi principi. Tuttavia ogni verità doveva essere dedotta da altre verità. A loro volta queste verità dovevano essere dimostrate ricorrendo ad altre verità ancor più fondamentali e così via. Alla fine i logici si trovarono dinanzi a pochi enunciati essenziali, talmente fondamentali da non poter essere a loro volta dimostrati. Queste assunzioni basilari sono gli assiomi della matematica.

Un esempio degli assiomi è la l*egge commutativa di addizione*, che recita semplicemente che, per ogni numero *m* e *n*,

$$m + n = n+m$$

Questo e pochi altri assiomi sono considerati evidenti per sé e possono essere facilmente verificati applicandoli a numeri particolari. Fino ad oggi gli assiomi hanno superato ogni verifica e sono stati accettati come il fondamento della matematica. La sfida per i logici era di ricostruire tutta la matematica a partire da questi assiomi. L'appendice 7 definisce l'insieme degli assiomi dell'aritmetica e dà un'idea di come i logici procedano nel costruire il resto della 'matematica.

Un'intera legione di logici prese parte al processo lento e faticoso di ricostruzione del corpo immensamente complesso della conoscenza matematica usando soltanto un numero minimo di assiomi. L'idea era di consolidare ciò che i matematici pensavano già di sapere impiegando solo i criteri logici più rigorosi. Il matematico tedesco Hermann Weyl così compendiò lo stato d'animo dell'epoca: «La logica è l'igiene praticata dai matematici per mantenere sane e robuste le loro idee». Oltre a purificare ciò che era noto, con questa impostazione estremamente rigorosa si sperava anche di gettare luce su problemi ancora irrisolti, tra i quali l'Ultimo Teorema di Fermat.

Il programma era diretto dalla figura più eminente dell'epoca, David Hilbert. Hilbert riteneva che in matematica 'tutto potesse e dovesse essere dimostrato a partire da assiomi fondamentali. Il risultato doveva essere di dimostrare in maniera definitiva i due elementi più importanti del sistema della matematica. In primo luogo la matematica dovrebbe essere in grado, almeno teoricamente, di rispondere a ogni singola domanda: si tratta dello stesso ethos di completezza che in passato aveva richiesto l'invenzione di nuovi numeri come i negativi e gli immaginari. In secondo luogo, la matematica dovrebbe essere esente da contraddizioni, ossia dopo aver dimostrato con un metodo che un enunciato è vero, non dovrebbe essere possibile dimostrare con un altro metodo che lo stesso enunciato è falso. Hilbert era persuaso che, assumendo soltanto pochi assiomi, sarebbe stato possibile rispondere a ogni questione matematica immaginabile senza tema di cadere in contraddizione.

L'8 agosto 1900 Hilbert fece uno storico discorso al Congresso Internazionale dei Matematici a Parigi. Hilbert pose ventitré problemi di matematica irrisolti, che a suo giudizio erano della massima importanza e urgenza. Alcuni di essi erano relativi alle aree più generali della matematica, ma la maggior parte si concentrava sui fondamenti logici della materia. Hilbert aveva segnalato questi problemi per attirare l'attenzione del mondo matematico e per delineare un programma di ricerca. Hilbert voleva ottenere l'aiuto dei matematici per attuare la sua concezione di un sistema

matematico libero dai dubbi e dalle incongruenze, un'ambizione documentata dall'iscrizione che egli volle scolpita sulla sua pietra tombale:

> Noi dobbiamo sapere,
> noi sapremo.

Nel corso dei due decenni seguenti i logici e i matematici cercarono di completare la costruzione di un edificio matematico privo di crepe, e quando Hilbert andò in pensione nel 1930 egli poteva aver fiducia che la matematica fosse ormai ben avviata sulla strada di recuperare la coerenza perduta. Il suo sogno di una logica coerente, abbastanza potente da rispondere a ogni domanda, stava in apparenza per avverarsi.

Ma nel 1931 uno sconosciuto matematico venticinquenne pubblicò uno scritto che avrebbe distrutto per sempre le speranze di Hilbert. Kurt Gödel avrebbe costretto i matematici ad accettare l'idea che la matematica non poteva mai essere logicamente perfetta e nella sua opera era implicita l'idea che problemi come l'Ultimo Teorema di Fermat potevano persino rimanere insolubili.

Kurt Gödel nacque il 28 aprile 1906 in Moravia, allora parte dell'Impero austroungarico e oggi nella Repubblica Ceca. Sin da bambino Kurt Gödel manifestò un talento per la scienza e la matematica e la sua indole indagatrice indusse i suoi famigliari a soprannominarlo *der Herr Warum*, il Signor Perché. Si recò all'Università di Vienna incerto tra la matematica e la fisica, ma un corso illuminante e appassionato del professor P. Furtwängler sulla teoria dei numeri persuase Gödel a dedicare ai numeri la sua vita. Le lezioni di Furtwängler erano rese ancor più straordinarie dal fatto che il professore era paralizzato dal collo fino ai piedi e doveva far lezione dalla sedia a rotelle, senza appunti, mentre l'assistente scriveva sulla lavagna.

Dall'età di vent'anni Gödel era entrato a far parte del dipartimento di matematica dell'Università di Vienna, ma insieme con i colleghi egli si recava alle riunioni del *Wiener Kreis* (il Circolo di Vienna), costituito da un gruppo di filosofi che si incontravano per discutere le più attuali e importanti questioni di logica e di epistemologia. Fu durante questo periodo che Gödel sviluppò le idee che avrebbero sgretolato i fondamenti della matematica.

Nel 1931 Gödel pubblicò *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme* (Sulle Proposizioni formalmente indecidibili nei *Principia Mathematica* e nei Sistemi connessi), che conteneva il cosiddetto teorema di indecidibilità. Quando la notizia del teorema giunse in America, il grande matematico John von Neumann annullò subito una serie di lezioni che stava tenendo sul programma di Hilbert e dedicò la parte restante del corso a una discussione sull'opera rivoluzionaria di Gödel.

Gödel aveva dimostrato che cercare di creare un sistema matematico completo e coerente era un compito impossibile. Le sue idee possono essere enucleate in due enunciati.

Primo teorema di indecidibilità
Se la teoria assiomatica stabilita è coerente, esistono teoremi che non possono essere né dimostrati né confutati.

Secondo teorema di indecidibilità
Non esiste un procedimento costruttivo che dimostri la coerenza della teoria assiomatica.

La prima affermazione in sostanza significava che qualunque siano gli assiomi utilizzati, ci saranno questioni alle quali la matematica non saprà rispondere e dunque la completezza non potrà mai essere raggiunta. Peggio ancora, la seconda affermazione significava che i matematici non potranno mai essere certi che gli assiomi da loro scelti non conducano a una contraddizione, ossia la coerenza della matematica non può mai essere dimostrata. All'età di soli venticinque anni Gödel aveva mostrato che il programma di Hilbert era impossibile.

Anche se il secondo teorema di Gödei affermava che era impossibile dimostrare la coerenza degli assiomi, questo non significava necessariamente che fossero incoerenti. Molti matematici erano ancora in cuor loro convinti che la matematica restasse un sapere coerente, anche se con la mente non potevano dimostrarlo. Molti anni dopo il grande teorico dei numeri André Weil disse: «Dio esiste poiché la matematica è coerente ed esiste anche il Diavolo perché non possiamo dimostrare la coerenza della matematica».

Per comprendere meglio il teorema di indecidibilità di Gödel, la sua origine e le sue implicazioni, si può ricorrere a un analogo paradosso della logica greca antica, che è attribuito a Epimenide di Creta ed è conosciuto come il *paradosso del Mentitore.* Epimenide esclamò: «*Io sono un mentitore*!». Il paradosso sorge quando cerchiamo di stabilire se quest'affermazione è vera o falsa. Vediamo prima cosa succede se assumiamo che l'affermazione è vera. La verità dell'affermazione implica che Epimenide sia un mentitore, ma ciò contrasta con il nostro assunto iniziale che egli ha fatto un'affermazione vera e che dunque non è un mentitore: siamo davanti a un'incongruenza. D'altro canto vediamo cosa succede se assumiamo che l'affermazione sia falsa. La falsità dell'affermazione implica che Epimenide non sia un mentitore, ma noi abbiamo assunto inizialmente che egli abbia fatto un'affermazione falsa e che perciò Epimenide è un mentitore: siamo di fronte a un'altra incongruenza. Sia che assumiamo la verità o la falsità dell'affermazione finiamo per incontrare una contraddizione e perciò l'affermazione non è né vera né falsa, ma viene definita indecidibile.

Gödel reinterpretò il paradosso del mentitore introducendovi il concetto di dimostrazione. Ne risultò questo tipo di affermazione:

Questa affermazione non ammette alcuna dimostrazione

Se l'affermazione fosse falsa, allora essa sarebbe dimostrabile, ma questo contraddice l'affermazione stessa. Perciò per evitare la contraddizione l'affermazione dev'essere vera. Ma, anche se l'affermazione è vera, essa non può essere dimostrata

proprio perché l'affermazione (che noi sappiamo ora essere vera) afferma la propria indimostrabilità.

Poiché Gödel seppe tradurre l'affermazione di cui sopra in termini matematici, egli potè dimostrare che nella matematica esistevano enunciati che sono veri, ma la cui verità non può mai essere dimostrata, i cosiddetti enunciati indecidibili. Questo era il colpo mortale per il programma di Hilbert.

Sotto diversi aspetti l'opera di Gödel è parallela a scoperte analoghe che sono state fatte nella fisica quantistica. Quattro anni prima che Gödel pubblicasse la sua opera sull' indecidibilità, il fisico tedesco Werner Heisenberg scoprì il principio di indeterminazione. Proprio come esisteva un limite fondamentale alla possibilità di dimostrare i teoremi da parte dei matematici, Heisenberg mostrò che c'era un limite fondamentale alle proprietà che i fisici potevano misurare. Per esempio, se i fisici vogliono misurare l'esatta posizione di un oggetto, allora possono misurarne la velocità solo in maniera approssimativa. Ciò avviene perché allo scopo di misurare la posizione dell'oggetto sarebbe necessario illuminarlo ocn fotoni di luce, ma per determinarne l'esatta posizione i fotoni dovrebbero possedere un'enorme energia. Se però l'oggetto viene bombardato con fotoni ad alta energia, la sua velocità verrà alterata e diventerà intrinsecamente incerta. Pertanto, nell'esigere la conoscenza della posizione di un oggetto, i fisici sono costretti a rinunciare a una conoscenza precisa della sua velocità.

Il principio di indeterminazione di Heisenberg si manifesta soltanto su scala atomica, dove le misure di alta precisione hanno un'importanza fondamentale. Perciò gran parte della fisica può proseguire il proprio cammino senza curarsi che i fisici quantistici si occupino di questioni profonde concernenti i limiti del sapere del sapere naturale. Lo stesso è accaduto nel mondo della matematica. Mentre i logici affrontavano un dibattito alquanto esoterico sulla indecidibilità, il resto della comunità matematica proseguiva incurante la propria attività. Benchè Gödel avesse dimostrato che esistevano alcuni enunciati che non potevano essere dimostrati, ce *n*'erano moltissimi altri che potevano esserlo e la sua scoperta non invalidava nulla di quanto era stato dimostrato in passato. Inoltre, molti matematici credevano che gli enunciati indecidibili di Gödel si sarebbero trovati solo nelle regioni più oscure e marginali della matematica e che perciò poteva accadere che non li incontrasse mai. Dopo tutto Gödel aveva soltanto asserito l'esistenza di simili enunciati, ma non aveva potuto indicarne realmente alcuno. Ma nel 1963 l'incubo teorico di Gödel divenne realtà in carne e ossa.

Paul Cohen, un matematico di ventinove anni della Stanford University, sviluppò una tecnica per verificare se una particolare equazione fosse o non fosse indecidibile. La tecnica funziona solo in pochissimi casi molto particolari, ma egli fu nondimeno la prima persona a scoprire questioni specifiche che erano davvero indecidibili. Fatta la scoperta, Cohen volò subito a Princeton, con le prove alla mano, per farla verificare dallo stesso Gödel. Gödel, che era ormai entrato in una fase paranoica della sua vita, aprì leggermente la porta, afferrò i fogli e richiuse l'uscio con violenza. Due giorni dopo Cohen ricevette un invito a prendere il tè a casa di Gödel, un segnale che il maestro aveva conferito alla dimostrazione il marchio della sua autorevolezza. L'aspetto particolarmente sconvolgente era che alcune di quelle questioni indecidibili

erano centrali per la matematica. Per ironia della sorte Cohen dimostrò che una delle questioni che David Hilbert aveva incluso tra i ventitré problemi più importanti della matematica, ossia l'ipotesi del continuo , era indecidibile.

L'opera di Gödel , insieme con gli enunciati indecidibili scoperti da Cohen, rappresentava un messaggio inquietante per tutti quei matematici, dilettanti o professionisti, che persistevano nei loro tentativi di dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat: forse quel teorema era indecidibile! E se Pierre de Fermat si fosse sbagliato quando aveva affermato di possedere la dimostrazione? In tal caso, era possibile che l'Ultimo Teorema fosse indecidibile. Dimostrarlo poteva essere assai più che un'impresa difficile; poteva essere un'impresa impossibile. Se l'Ultimo Teorema di Fermat era indecidibile, allora i matematici avevano trascorso secoli alla ricerca di una dimostrazione inesistente.

Curiosamente se l'Ultimo Teorema di Fermat si rivelava indecidibile, allora questo implicava che doveva essere vero. La ragione di questa implicazione è la seguente. L'Ultimo Teorema afferma che non ci sono soluzioni in numeri interi per l'equazione

$$x^n + y^n = z^n \text{ per } n \text{ maggiore di } 2.$$

Se l'Ultimo Teorema fosse falso, allora sarebbe possibile dimostrarlo identificando una soluzione, ossia un controesempio. Perciò, in tal caso, l'Ultimo Teorema sarebbe decidibile. L'essere falso sarebbe contraddittorio con l'essere indecidibile. Invece, se l'Ultimo Teorema fosse vero, non necessariamente esisterebbe un modo altrettanto inequivocabile di dimostrarlo, ossia potrebbe essere indecidibile. In conclusione l'Ultimo Teorema di Fermat potrebbe essere vero, ma potrebbe non esserci il modo di dimostrarlo.

La spinta irresistibile della curiosità

La nota scribacchiata frettolosamente da Pierre de Fermat sul margine dell' *Arithmetica* di Diofanto aveva condotto all'enigma più provocante nella storia. Nonostante tre secoli di gloriosi fallimenti e l'idea, derivante dal teorema di Gödel, che potesse trattarsi della caccia a una dimostrazione inesistente, alcuni matematici continuarono a essere attratti dal problema. L'Ultimo Teorema era una sirena matematica, che attirava verso di sé dei geni solo per infrangere le loro speranze. Ogni matematico che si dedicasse all'Ultimo Teorema rischiava di rovinare la propria carriera e però chiunque avesse trovato la possibile soluzione sarebbe passato alla storia come colui che aveva risolto il più difficile problema al mondo.

Generazioni di matematici furono ossessionate dall'Ultimo Teorema di Fermat per due motivi. In primo luogo c'era l'attrattiva di essere la sola persona all'altezza della questione. L'Ultimo Teorema era la prova più difficile e chiunque potesse dimostrarlo sarebbe riuscito laddove Cauchy, Euler, Kummer e innumerevoli altri avevano fallito. Come lo stesso Fermat si divertiva moltissimo a risolvere problemi

che sconcertavano i suoi contemporanei, così chiunque fosse riuscito a dimostrare l'Ultimo Teorema avrebbe gioito all'idea di aver risolto un problema che aveva lasciato perplessa l'intera comunità dei matematici per centinaia di anni. In secondo luogo, chiunque avesse vinto la sfida di Fermat, poteva godere dell'innocente soddisfazione di risolvere un enigma. La gioia che si prova a risolvere questioni esoteriche nella teoria dei numeri non è diversa dalla semplice gioia di risolvere i banali rompicapo inventati da Sam Loyd. Un matematico una volta mi disse che il piacere che egli traeva dalla risoluzione di problemi matematici è simile a quello che provano gli appassionati di parole crociate. Scrivere l'ultima parola di un cruciverba particolarmente difficile è sempre un'esperienza soddisfacente, ma immaginate il senso di soddisfazione nel dedicare anni di lavoro a risolvere un enigma che nessun altro al mondo ha mai saputo risolvere e trovare infine la soluzione.

Sono queste le ragioni che attirarono Andrew Wiles verso il teorema di Fermat: «I matematici puri amano la sfida. Amano i problemi irrisolti. Nel fare matematica si provano grandi sensazioni. Si comincia con un problema che sfugge. Non puoi capirlo, è troppo complicato, non sai da che parte cominciare. Ma quando finalmente l'hai risolto, hai la sensazione incredibile di quanto sia bella la soluzione, di come tutti gli aspetti si armonizzino così elegantemente. I problemi che sembrano facili sono i più ingannevoli, perché si dimostrano estremamente intricati. Fermat ne è l'esempio più bello. Esso fa presagire una soluzione e, ovviamente, ha un'attrazione speciale perché Fermat affermò di avere la soluzione».

La matematica ha il suo campo applicativo nella scienza e nella tecnologia, ma non è questo che a motivare i matematici. Essi sono sospinti dalla gioia della scoperta. G.H. Hardy cercò di spiegare e giustificare la sua carriera nel libro intitolato *Apologia di un matematico*:

> Dirò soltanto che se un problema di scacchi è «inutile», nel senso letterale del termine, allora lo è anche la maggior parte della migliore matematica…Io non ho fatto mai niente di «utile». Nessuna mia scoperta matematica ha aggiunto qualcosa, nè verosimilmente aggiungerà qualcosa, direttamente o indirettamente, nel bene e nel male, alle attrattive del mondo. Giudicato secondo tutti i parametri pratici, il valore della matematica è nullo; e al di fuori della matematica è assolutamente insignificante. Ho un'unica possibilità di sfuggire al verdetto di irrilevanza totale, se si giudica che ho creato qualcosa che valeva la pena creare. Che ho creato qualcosa è innegabile: la questione riguarda il suo valore.

Il desiderio di una soluzione a qualunque problema matematico è alimentato in gran parte dalla curiosità e il premio è la semplice ma enorme soddisfazione derivata dalla soluzione di ogni enigma. Il matematico E.C. Titchmarsh una volta disse: «Non può avere alcuna utilità pratica sapere che π è irrazionale, ma se possiamo saperlo, allora certamente sarebbe inammissibile ignorarlo».

Nel caso dell'Ultimo Teorema di Fermat la curiosità non mancava. L'opera di Gödel sull' indecidibilità aveva introdotto un elemento di dubbio sulla possibilità di risolvere il problema, ma questo dubbio non era sufficiente a scoraggiare i veri fanatici del Teorema di Fermat. Più avvilente era il fatto che negli anni Trenta del

nostro secolo i matematici avevano esaurito tutte le loro tecniche e avevano poco altro a disposizione. Ciò che serviva era un nuovo strumento, qualcosa che avrebbe sollevato il morale dei matematici. La seconda guerra mondiale rispose a questa aspettativa con il più grande balzo in avanti nella capacità di calcolare dopo l'invenzione del regolo calcolatore.

Il ricorso alla forza bruta

Quando nel 1940 G.H. Hardy dichiarò che la miglior matematica è in gran parte inutile, aggiunse prontamente che questa caratteristica non era necessariamente negativa: «La vera matematica non ha alcun effetto sulla guerra. Nessuno ha ancora scoperto un'applicazione bellica della teoria dei numeri». Hardy sarebbe stato smentito di lì a poco.

Nel 1944 John von Neumann scrisse insieme ad altri il volume *The Theory of Games and Economic Behavior*, nel quale coniò l'espressione «teoria dei giochi». La teoria dei giochi era il tentativo di von Neumann di impiegare la matematica per descrivere la struttura dei giochi e la condotta umana nel corso dei giochi. Cominciò studiando gli scacchi e il poker e poi proseguì la ricerca costruendo un modello di giochi più sofisticati come l'economia. Dopo la seconda guerra mondiale la RAND Corporation si rese conto del potenziale racchiuso nelle idee di von Neumann e lo ingaggiò perché lavorasse a elaborare le strategie della guerra fredda. Da quel momento in poi, la teoria matematica dei giochi è diventata uno strumento essenziale che i generali impiegano per verificare le strategie militari, considerando le battaglie come complesse partite a scacchi. Una semplice illustrazione dell'applicazione della teoria dei giochi alle battaglie ci è offerta da un racconto che riguarda il duello con tre partecipanti.

Una mattina il signor Neri, il signor Rossi e il signor I Bianchi decidono di risolvere un conflitto duellando con le pistole finché uno solo di loro sopravviverà. Il signor Neri è il peggior tiratore e in media colpisce il bersaglio solo una volta su tre. Il signor Rossi è più bravo e colpisce il bersaglio due volte su tre. Il signor Bianchi è il migliore di tutti e colpisce sempre il bersaglio. Per rendere più equo il duello a tre al signor Neri è permesso di sparare per primo, al signor Rossi (se sarà ancora vivo) di sparare per secondo e al signor i Bianchi (purché sia ancora vivo) di sparare per terzo. Il giro si ripeterà in quest'ordine finché uno solo resti vivo. La domanda è: contro chi il signor Neri dovrebbe sparare il primo colpo? Potreste ipotizzare una risposta in base all'intuito o meglio ancora potreste basarvi sulla teoria dei giochi. La risposta è discussa nell'appendice 8.

In tempo di guerra ancor più importante della teoria dei giochi è l'impiego della matematica alla decifrazione dei codici segreti. Durante la seconda guerra mondiale gli Alleati compresero che in teoria la logica matematica poteva essere usata per decrittare i messaggi tedeschi, purché i calcoli fossero sviluppati rapidamente. L'obiettivo era quello di trovare un metodo per automatizzare il calcolo mediante una

macchina. A questo sforzo di decrittazione dei codici del nemico il massimo contributo fu dato dall'inglese Alan Turing.

Nel 1938 Turing tornò a Cambridge dopo un soggiorno all'Università di Princeton. Aveva assistito personalmente al subbuglio provocato dal teorema di indecidibilità di Gödel e si era impegnato nel tentativo di ricomporre i frammenti del sogno hilbertiano. In particolare voleva sapere se esisteva un modo di definire quali questioni fossero e quali non fossero decidibili e cercò di sviluppare un metodo per rispondere alla domanda. All'epoca le calcolatrici erano primitive e praticamente inutili quando si trattava di affrontare problemi di alta matematica e perciò Turing pensò a una macchina immaginaria capace di calcoli infiniti. Questa calcolatrice ipotetica, che consumava un numero infinito di immaginari rotoli di carta e che poteva calcolare per l'eternità era tutto ciò che gli serviva per esplorare i suoi astratti problemi di logica. Ciò di cui Turing era inconsapevole era che questa immaginata automatizzazione di problemi ipotetici avrebbe infine condotto a grandi innovazioni nell'effettuare calcoli reali da parte di macchine reali.

Nonostante lo scoppio delle ostilità, Turing continuò a svolgere le sue ricerche come membro del King's College, finché il 4 settembre 1940 la sua tranquilla esistenza di professore cantabrigense venne bruscamente interrotta. I suoi servigi furono richiesti dalla Government Code and Cypher School il cui compito era di decrittare i messaggi in codice del nemico. Prima della guerra i tedeschi avevano dedicato uno sforzo considerevole a sviluppare un sistema superiore di crittografia e ciò preoccupava grandemente i servizi segreti britannici, che in passato erano stati in grado di decifrare le comunicazioni dei loro nemici con relativa facilità.

Nel volume British Intelligence in the Second World War, che è una pubblicazione ufficiale dell'H.M.S.O.[4], così viene descritta la situazione negli anni Trenta:

> Dal 1937 divenne chiaro che, diversamente dai loro alleati giapponesi e italiani, l'esercito, la marina e probabilmente l'aviazione tedesca, insieme con altre organizzazioni statali quali le ferrovie e le SS, usavano per tutte le loro comunicazioni, tranne quelle di natura tattica, versioni differenti dello stesso sistema cifrato: il sistema basato sulla macchina Enigma, prodotta negli anni Venti, ma che i tedeschi avevano reso sempre più sicura con progressive modifiche. Nel 1937 la Government Code and Cypher School decifrò il codice usato dal modello più arretrato e meno sicuro della macchina, che veniva impiegato dai tedeschi, dagli italiani e dai nazionalisti spagnoli. Ma a prescindere da questa scoperta, Enigma resistette agli assalti e sembrava probabile che avrebbe continuato a resistere.

La macchina Enigma consisteva di una tastiera collegata a un'unità di cifratura. Quest'unità conteneva tre rotori separati e le posizioni dei rotori determinavano come ogni lettera della tastiera veniva cifrata. Ciò che rendeva così difficile violare il codice Enigma era l'enorme numero di modi in cui la macchina poteva essere

[4] Her Majesty's Stationery Office, con funzioni parzialmente analoghe a quelle assolte in Italia dal Poligrafico dello Stato. [N.d.T.]

impostata. Per prima cosa i tre rotori montati sulla macchina venivano scelti da un gruppo di cinque e la loro posizione poteva essere cambiata e invertita per confondere i decrittatori nemici. In secondo luogo ogni rotore poteva essere posizionato in ventisei modi diversi. Questo significava che la macchina poteva essere impostata in più di un milione di modi diversi. Oltre alle permutazioni rese possibili dai rotori, i collegamenti sul retro della macchina potevano essere cambiati manualmente per fornire un totale di più di centocinquanta milioni di milioni di milioni di possibili impostazioni. Per aumentare ancora di più la sicurezza, i tre rotori mutavano continuamente il loro orientamento, in modo che ogni volta che veniva trasmessa una lettera, l'impostazione della macchina e dunque la cifratura mutavano per la lettera successiva. Perciò se si digitava «DODO» il messaggio risultante poteva essere «FGTB»: la «D» e la «O» venivano digitate due volte, ma ogni volta venivano cifrate diversamente.

Le forze armate tedesche vennero dotate di macchine Enigma, le quali venivano utilizzate anche dalle ferrovie e da altri organismi statali. Come tutti i sistemi in codice usati durante questo periodo, una debolezza di Enigma era che il ricevente doveva conoscere l'impostazione dell'Enigma del mittente. Per mantenere la sicurezza le impostazioni di Enigma dovevano essere cambiate ogni giorno. Un modo per cambiare regolarmente le impostazioni e per tenere informati i riceventi di tali mutamenti era di pubblicare le impostazioni giornaliere in un libro cifrato segreto. Il rischio di questa procedura era che gli inglesi avrebbero potuto catturare un *U-Boot* e impossessarsi del libro dei codici nel quale erano registrate tutte le impostazioni giorno per giorno per il mese successivo. La procedura alternativa, adottata per gran parte della guerra, fu di trasmettere le impostazioni giornaliere in un preambolo al messaggio, codificandole secondo l'impostazione adottata il giorno precedente.

Quando iniziò la guerra, la British Cypher School era in mano ai classicisti e ai linguisti. Il Ministero degli Esteri si rese subito conto che i teorici dei numeri avevano migliori probabilità di trovare la chiave per violare i codici tedeschi e così nove dei più geniali teorici dei numeri britannici vennero convocati alla nuova sede della Cypher School in Bletchley Park, una dimora vittoriana a Bletchley nel Buckinghamshire. Turing dovette abbandonare le sue macchine ipotetiche dai nastri infiniti e dalla illimitata capacità di calcolo per affrontare i problemi pratici di una situazione dove le risorse erano finite e le scadenze erano rigidissime.

La crittografia è una battaglia intellettuale tra il codificatore e il decifratore. L'obiettivo del codificatore è di cifrare un messaggio in modo tale che risulti indecifrabile se viene intercettato dal nemico. Tuttavia c'è un limite alla possibile manipolazione matematica, dovuto alla necessità di inviare rapidamente messaggi efficaci. Il punto di forza del codice tedesco Enigma era che i messaggi in codice subivano diversi livelli di cifratura a velocità molto elevata. L'obiettivo del decifratore era di intercettare un messaggio e di violarne il codice quando i contenuti del messaggio erano ancora importanti. Un messaggio tedesco che ordinava la distruzione di una nave britannica doveva essere decrittato prima che la nave venisse affondata.

Turing diresse un gruppo di matematici che cercò di costruire immagini speculari della macchina Enigma. Turing realizzò in questi congegni le idee che aveva

maturato prima della guerra. In teoria le macchine inventate da Turing potevano verificare metodicamente tutte le possibili impostazioni di Enigma fino a decrittare il codice. Le macchine inglesi, alte più di due metri e larghe altrettanto, impiegavano *relè* elettromeccanici per verificare tutte le possibili impostazioni di Enigma. Il ticchettio costante dei circuiti le fece soprannominare «bombe». Nonostante la loro rapidità era impossibile che le bombe riuscissero a controllare tutte le centocinquanta milioni di milioni di milioni di possibili impostazioni di Enigma in un lasso di tempo ragionevolmente breve e perciò il gruppo di Turing doveva trovare il modo di ridurre in maniera significativa il numero delle permutazioni da analizzare, estraendo dai messaggi inviati dal nemico tutte le informazioni possibili.

Uno dei più grandi progressi compiuti dagli inglesi fu la constatazione che la macchina Enigma non poteva mai inserire nel proprio codice interno la lettera digitata sulla tastiera: ossia, se il mittente digitava la «R», allora la macchina poteva potenzialmente codificare la «R» con ogni altra lettera, a seconda della sua impostazione, tranne che con la stessa lettera «R». Questa constatazione apparentemente insignificante fu invece utilissima a ridurre drasticamente il tempo richiesto per decifrare i messaggi. I tedeschi adottarono la contromisura di limitare la lunghezza dei messaggi inviati. Tutti i messaggi contengono inevitabilmente indizi che i decifratori possono sfruttare, e più lungo è il messaggio, più numerosi sono gli indizi. Limitando tutti i messaggi a un massimo di duecentocinquanta lettere, i tedeschi speravano di compensare l'incapacità della macchina Enigma di inserire nel proprio codice la stessa lettera digitata.

Per decifrare i codici Turing spesso cercava di indovinare le parole-chiave dei messaggi. Se ci riusciva, il tempo per decifrare la parte restante del messaggio diminuiva enormemente. Per esempio, se i decifratori sospettavano che un messaggio contenesse un bollettino meteorologico, un tipo di comunicazione in codice abbastanza frequente, allora cercavano di indovinare se il messaggio conteneva parole-chiave come «nebbia» o «velocità del vento». Se avevano ragione, potevano rapidamente decifrare quel messaggio e perciò dedurre l'impostazione di Enigma per quel giorno. Per il resto del giorno, altri messaggi, più preziosi, potevano essere decifrati facilmente.

Quando non riuscivano a indovinare parole relative alla situazione meteorologica, gli inglesi cercavano di mettersi nei panni degli operatori tedeschi di Enigma per indovinare altre parole-chiave. Un operatore poco scrupoloso poteva rivolgersi al ricevente chiamandolo per nome o poteva aver sviluppato idiosincrasie note ai decifratori. Quando tutti i tentativi fallivano e le comunicazioni tedesche procedevano indisturbate, si dice che la British Cypher School ricorresse perfino al trucco di chiedere alla RAF di minare un particolare porto tedesco. Subito la capitaneria di porto tedesca avrebbe inviato un messaggio cifrato che sarebbe stato intercettato dagli inglesi. I decifratori potevano essere certi che un simile messaggio avrebbe contenuto parole come «mina», «evitare» e «mappa». Decifrato il messaggio, Turing poteva così conoscere l'impostazione di Enigma per quel giorno e ogni altra comunicazione tedesca diventava facilmente decifrabile.

Il primo febbraio 1942 i tedeschi aggiunsero una quarta ruota alle macchine Enigma impiegate per inviare informazioni particolarmente delicate. Questo fu il più

grande innalzamento del livello di crittografia durante la guerra, ma alla fine il gruppo di Turing contrattaccò accrescendo l'efficienza delle «bombe». Grazie alla Cypher School gli Alleati sapevano più cose sul nemico di quanto i tedeschi abbiano mai sospettato. L'impatto degli *U-Boot* nell'Atlantico fu grandemente ridotto e gli inglesi venivano avvisati in anticipo delle incursioni della Luftwaffe. Gli inglesi intercettarono e decifrarono anche l'esatta posizione delle navi tedesche da rifornimento, consentendo alla marina di inviare incrociatori e cacciatorpediniere per affondarle.

Gli Alleati dovevano preoccuparsi sempre che le proprie azioni evasive o i propri attacchi precisi non rivelassero implicitamente ai tedeschi che erano in grado di decifrare le loro comunicazioni. Se i tedeschi sospettavano che il codice Enigma era stato violato, avrebbero accresciuto il livello di cifratura e i britannici potevano ritrovarsi nella situazione di dover ricominciare daccapo. Pertanto vi furono occasioni in cui la Cypher School informò gli Alleati di un imminente attacco nemico, ma gli Alleati scelsero di non prendere contromisure estreme. Si è persino detto che Churchill sapesse che Coventry era l'obiettivo designato di un'incursione aerea devastante e tuttavia decidesse di non prendere precauzioni particolari per non insospettire i tedeschi. Stuart Milner-Barry, che lavorava con Turing, smentisce però questa voce e afferma che il messaggio relativo a Coventry fu decifrato troppo tardi.

L'uso ristretto delle informazioni tratte dall'opera di decodificazione funzionò perfettamente. Anche quando gli inglesi sfruttarono comunicazioni intercettate per infliggere pesanti perdite al nemico, i tedeschi non sospettarono che il codice Enigma fosse stato violato. Essi ritenevano che il proprio livello di cifratura fosse così elevato da rendere assolutamente impossibile la decodificazione dei loro messaggi. Imputavano invece ogni grave insuccesso alla capacità dei servizi segreti britannici di infiltrarsi nei loro ranghi.

A causa della segretezza che circondava l'attività svolta a Bletchley da Turing e dal suo gruppo, il loro immenso contributo allo sforzo bellico non potè essere pubblicamente riconosciuto neppure molti anni dopo la fine del conflitto. Si è soliti dire che la prima guerra mondiale fu la guerra dei chimici e che la seconda guerra mondiale fu la guerra dei fisici. In realtà, in base alle informazioni rivelate in anni recenti, corrisponde probabilmente a verità dire che la seconda guerra mondiale fu anche la guerra dei matematici e nel caso di un terzo conflitto planetario il loro contributo sarebbe ancora più fondamentale.

Durante tutta la sua carriera di decifratore Turing non perse mai di vista i suoi obiettivi matematici. Le macchine ipotetiche avevano lasciato il posto a macchine reali, ma le questioni astratte rimanevano irrisolte. Alla fine della guerra Turing aveva contribuito alla costruzione di Colossus, una macchina totalmente elettronica consistente di millecinquecento valvole, che erano assai più veloci dei relè elettromeccanici impiegati nelle «bombe». Colossus era un computer nel senso moderno del termine e data la sua grande velocità e sofisticazione Turing cominciò a ritenerlo una sorta di cervello primitivo: aveva una memoria, poteva elaborare informazioni e gli stati del computer assomigliavano agli stati della mente umana. Turing aveva trasformato la sua macchina Immaginaria nel primo vero computer.

Con la fine della guerra Turing continuò a costruire macchine sempre più complesse, come l' ACE (Automatic Computing Engine). Nel 1948 egli si trasferì all'Università di Manchester e costruì il primo computer al mondo che aveva un programma elettronico incorporato. Turing aveva tornito alla Gran Bretagna i computer più avanzati esistenti pi mondo, ma non sarebbe vissuto abbastanza per vedere i loro prodigiosi calcoli.

Negli anni dopo la guerra Turing era stato sorvegliato dai servizi segreti britannici, che sapevano delle sue abitudini omosessuali. Essi temevano che l'uomo che più di ogni altro era al corrente dei codici segreti britannici fosse vulnerabile ai ricatti e decisero di spiare ogni sua mossa. Turing aveva accettato senza troppa difficoltà di essere costantemente sorvegliato, ma nel 1952 venne arrestato per violazione delle leggi inglesi sull'omosessualità. Questa umiliazione gli rese la vita intollerabile. Andrew Hodges, biografo di Turing, descrive così gli eventi relativi alla sua morte:

> La morte di Alan Turing sconvolse coloro che lo conoscevano... Che egli fosse una persona infelice e preoccupata; che stesse consultando uno psichiatra e avesse sofferto di un duro colpo che avrebbe abbattuto molta gente, tutto ciò era chiaro. Ma erano passati due anni dal processo, il trattamento ormonale si era concluso un anno prima e sembrava che Turing avesse superato tutto ciò.
> L'inchiesta, il 10 giugno 1954, stabilì trattarsi di suicidio. Egli era stato trovato nel letto, dove giaceva compostamente. La bocca era orlata di schiuma e il patologo che stilò il certificato di morte identificò senza esitazioni il caso come morte a seguito di avvelenamento da cianuro... Nella casa c'era un flacone di cianuro di potassio e anche un flacone contenente una soluzione di cianuro. A fianco del letto c'era la metà di una mela, sulla quale erano evidenti i segni dei morsi. La mela non venne analizzata e pertanto non venne mai stabilito con precisione se, come sembrava ovvio, la mela era stata intinta nel cianuro.

L'eredità lasciata da Turing fu una macchina che poteva sviluppare e completare nel giro di poche ore un calcolo che sarebbe stato lunghissimo e praticamente impossibile per un uomo. I computer di oggi effettuano in una frazione di secondo più calcoli di quelli che Fermat abbia eseguito in tutta la sua vita. I matematici che erano ancora alle prese con l'Ultimo Teorema di Fermat cominciarono a impiegare i computer per aggredire il problema, affidandosi a una versione computerizzata dell'impostazione ottocentesca di Kummer.

Kummer, avendo scoperto un difetto nelle dimostrazioni di Cauchy e di Lamé, mostrò che il problema principale nel dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat era quello di risolvere i casi in cui n equivale a un primo irregolare: per i valori di n fino a 100 i soli primi irregolari erano 37, 59 e 67. Nello stesso tempo Kummer mostrò che in teoria tutti i primi irregolari potevano essere affrontati l'uno dopo l'altro, caso per caso, e il solo problema era che per ognuno sarebbero stati necessari calcoli lunghissimi. Per illustrare il concetto Kummer e il suo collega Dimitri Mirimanoff trascorsero settimane a effettuare i calcoli richiesti per risolvere i casi dei tre numeri primi irregolari inferiori a 100. Tuttavia né loro né altri matematici erano pronti a iniziare a lavorare alla successiva infornata di primi irregolari tra 100 e 1000.

Pochi decenni dopo i problemi di calcolo cominciarono a svanire. Con l'avvento del computer, i casi difficoltosi dell'Ultimo Teorema di Fermat potevano essere sbrigati velocemente e dopo la seconda guerra mondiale gruppi di informatici e di matematici dimostrarono l'Ultimo Teorema di Fermat per tutti i valori di *n* fino a 500, quindi fino a 1000 e poi a 10.000. Negli anni Ottanta Samuel S. Wagstaff dell'Università dell'Illinois alzò il limite fino a 25.000 e più recentemente altri matematici poterono affermare che l'Ultimo Teorema di Fermat era vero per tutti i valori di *n* fino a 4 milioni.

Anche se i profani ritenevano che la moderna tecnologia stesse finalmente avendo la meglio sul teorema di Fermat, la comunità matematica era consapevole che il successo era puramente di facciata. Anche se per decenni si fossero impiegati i supercomputer per dimostrare un valore di *n* dopo l'altro, non si sarebbe mai potuto dimostrare il teorema per ogni valore di *n* fino all'infinito e perciò non si sarebbe mai potuto affermare di aver dimostrato tutto il teorema. Anche se il teorema fosse stato dimostrato vero fino a un miliardo di casi, non c'era nessuna ragione logica perché risultasse vero anche nel caso di un miliardo più uno. Lo stesso ragionamento può ripetersi per qualunque cifra ad *infinitum*. L'infinito non si può conquistare con l'applicazione della forza bruta di un computer che mastica numeri su numeri.

Tutto ciò che i calcolatori potevano offrire erano indizi in favore della verità dell'Ultimo Teorema di Fermat. A un osservatore esterno quegli indizi potevano sembrare prove schiaccianti, ma nessun indizio è mai sufficiente per soddisfare i matematici, i quali sono una comunità di scettici che non accetterà mai altro che non sia una dimostrazione assoluta. Una teoria che a partire da ciò che si dimostra valido per pochi numeri estrapoli il risultato così ottenuto per coprire l'infinità dei numeri è una scommessa rischiosa e inaccettabile.

Una particolare sequenza di numeri primi dimostra che l'estrapolazione è una stampella sulla quale è pericoloso appoggiarsi. Nel diciassettesimo secolo i matematici mostrarono con un esame dettagliato che i seguenti numeri sono tutti primi:

31; 331; 3331; 33.331; 333.331; 3.333.331; 33.333.331.

I numeri successivi della sequenza diventano sempre più alti e verificare se anch'essi siano o non siano numeri primi avrebbe richiesto uno sforzo considerevole. All'epoca alcuni matematici furono tentati di estrapolare il risultato a partire dallo schema in loro possesso, assumendo che tutti i numeri di questo tipo siano primi. Tuttavia il numero successivo della sequenza, ossia 333.333.331 si è rivelato non essere un numero primo:

333.333.331 = 17 x 19.607.843

Un altro bell'esempio che dimostra perché i matematici si rifiutarono di farsi convincere dai risultati forniti dal computer è il caso della congettura di Euler. Euler affermò che non c'erano soluzioni per un'equazione non dissimile da quella di Fermat:

$$x^4 + y^4 + {}^4 = w^4$$

Per duecento anni nessuno potè dimostrare la congettura di Euler e tuttavia nessuno potè confutarla trovando un esempio contrario. Prima i calcoli manuali e poi anni di calcoli con il computer non poterono trovare una soluzione. L'assenza di controesempi era un indizio fortissimo in favore della validità della congettura. Poi nel 1988 Naom Elkies dell'Università di Harvard scoprì la soluzione seguente:

$$2.682.440^4 + 15.365.639^4 + 18.796.760^4 = 20.615.673^4$$

Nonostante tutti gli indizi la congettura di Euler si rivelò falsa. Infatti Elkies dimostrò che c'erano infinite soluzioni all'equazione. La morale è che non si possono usare i risultati relativi al primo milione di numeri per dimostrare una congettura che vale per tutti i numeri.

Ma la natura ingannevole della congettura di Euler è niente in confronto alla *congettura sulla sovrastima dei numeri primi*. Analizzando numeri sempre più alti, diviene evidente che è sempre più difficile trovare numeri primi. Per esempio, fra 0 e 100 ci sono venticinque numeri primi, ma fra 10.000.000 e 10.000.100 ci sono solo due numeri primi. Nel 1791, appena quattordicenne, Carl Gauss previde in via approssimativa la frequenza con la quale i numeri primi si diradano nella serie degli altri numeri. La formula era ragionevolmente accurata, ma si era sempre ritenuto che sovrastimasse leggermente la vera distribuzione dei numeri primi. Se si controllano i numeri primi fino a un milione, a un milione di milioni o a un trilione si constata che la formula di Gauss è sempre un po' troppo generosa e i matematici furono fortemente tentati di credere che questa sovrastima valesse per tutti i numeri fino all'infinito. Perciò essi parlarono di congettura sulla sovrastima dei numeri primi.

Poi, nel 1914, J.E. Littlewood, collaboratore di G.H. Hardy a Cambridge, dimostrò che per cifre sufficientemente elevate la formula di Gauss *sottostimava* il numero dei numeri primi. Nel 1955 S. Skewes dimostrò che la sottostima si sarebbe verificata prima di raggiungere il numero:

$$10^{10^{10^{10^{34}}}}$$

Questo numero è al di là di ogni immaginazione e di ogni applicazione pratica. Hardy definì il numero di Skewes «il più grande numero che sia mai servito a qualche scopo definito nella matematica». Egli calcolò che se una persona avesse giocato a scacchi con tutte le particelle esistenti nell'universo (10^{87}), in una partita nella quale una mossa equivaleva semplicemente a scambiare il posto di due particelle, allora il numero delle partite possibili sarebbe stato approssimativamente quello del numero di Skewes.

Non c'era ragione di pensare che l'Ultimo Teorema di Fermat non dovesse rivelarsi altrettanto crudele e ingannevole della congettura di Euler o della congettura sulla sovrastima dei numeri primi.

Il laureato

Nel 1975 Andrew Wiles cominciò la sua carriera come studente laureato all'Università di Cambridge. Nei tre anni successivi avrebbe lavorato alla tesi di dottorato, perfezionando così il suo apprendistato nella matematica. Ogni studente era guidato e seguito da un supervisore, che nel caso di Wiles era l'australiano John Coates, un professore dell'Emmanuel College, originario di Possum Brush nel Nuovo Galles del Sud.

Coates ricorda ancora come egli adottò Wiles: «Un collega mi disse di avere un ottimo studente che si era appena laureato e mi invitò a seguirlo durante il dottorato. Fui davvero fortunato ad avere Andrew come studente. Già in quegli anni aveva idee molto profonde e fu sempre chiarissimo che era un matematico che avrebbe fatto grandi cose. Naturalmente, in quegli anni nessun studente di dottorato avrebbe cominciato a lavorare direttamente sull'Ultimo Teorema di Fermat. Era un argomento troppo difficile persino per un matematico di grande esperienza».

Nel decennio precedente tutto ciò che Wiles aveva fatto era stato finalizzato a prepararsi per raccogliere la sfida di Fermat, ma ora che era entrato nei ranghi dei matematici di professione doveva essere più pragmatico. Wiles ricorda come dovette temporaneamente rinunciare al proprio sogno: «Quando andai a Cambridge misi davvero da parte Fermat. Non già che me ne dimenticassi - mi era sempre ben presente -, ma mi resi conto che le sole tecniche in mio possesso per affrontarlo erano vecchie di centotrent'anni. Non pareva che queste tecniche andassero davvero alla radice del problema. Lavorare su Fermat significava che si potevano impiegare anni senza arrivare da nessuna parte. Ogni problema va bene, purché quando ci si occupi di esso si possa produrre qualche interessante sviluppo matematico, anche se alla fine il problema non viene risolto. Un problema matematico viene definito buono non per se stesso, ma a seconda della matematica che si produce nel corso del suo studio».

John Coates ebbe la responsabilità di trovare una nuova ossessione per Andrew, qualcosa che occupasse la sua ricerca almeno per i tre anni successivi. «Penso che tutto ciò che un supervisore possa fare per uno studente durante il dottorato di ricerca sia di cercare di spingerlo nella direzione giusta. Ovviamente, è impossibile essere sicuri di quale sia la direzione giusta di una ricerca, ma forse una cosa che può fare un matematico più anziano è di usare il suo fiuto, la sua intuizione di quella che può essere una buona area di ricerca; spetta poi allo studente dimostrare quanto avanti può spingersi in quella direzione.»

Alla fine Coates decise che Wiles avrebbe dovuto studiare l'area della matematica che riguarda le curve ellittiche. Questa decisione si sarebbe infine rivelata un punto di svolta nella carriera di Wiles e gli avrebbe fornito le tecniche di cui aveva bisogno per affrontare l'Ultimo Teorema di Fermat.

La definizione «curve ellittiche» è in certo modo fuorviante perché non si tratta nè di ellissi nè di curve nel senso normale della parola. Si tratta invece di equazioni che possono essere scritte nella forma

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c, \qquad \text{dove } a,b,c \text{ sono interi qualsiasi.}$$

Tali equazioni hanno ricevuto il nome di curve ellittiche perché in passato erano usate per misurare i perimetri delle ellissi e delle lunghezze delle orbite planetarie, ma per chiarezza mi riferirò ad esse semplicemente come equazioni ellittiche piuttosto che curve ellittiche.

L'obiettivo con le equazioni ellittiche, come pure con l'Ultimo Teorema di Fermat, è di scoprire se hanno soluzioni in numeri interi e, in caso positivo, quante soluzioni. Per esempio, l'equazione ellittica:

$$y^2 = x^3 - 2, \qquad \text{dove} \quad a = 0, \quad b = 0, \quad c = -2,$$

ha una sola soluzione con numeri interi e precisamente

$$5^2 = 3^3 - 2, \qquad \text{ossia} \quad 25 = 27 - 2.$$

Ciò che rende particolarmente affascinanti le equazioni ellittiche è che esse occupano una curiosa nicchia fra equazioni più semplici, che sono quasi banali, ed equazioni più complicate, impossibili da risolvere. Con il semplice cambiamento dei valori di a,b e c nell'equazione ellittica generale i matematici possono generare un'infinita varietà di equazioni, ciascuna con le sue caratteristiche, ma tutte nella sfera di ciò che può essere risolto.

Le equazioni ellittiche furono studiate originariamente dagli antichi matematici greci, compreso Diofanto, che dedicò gran parte della sua *Arithmetica* a esplorare le loro proprietà. Probabilmente ispirato da Diofanto, Fermat riprese lo studio delle equazioni ellittiche e, siccome erano state studiate dal suo eroe, Wiles fu felice di indagarle ulteriormente. Persino dopo duemila anni le equazioni ellittiche presentano ancora problemi formidabili per studenti come Wiles all'epoca del suo dottorato: «Si è molto lontani dal comprenderle pienamente. Esistono molte domande apparentemente semplici che potrei porre sulle equazioni ellittiche alle quali non si è ancora trovato risposta. Persino domande che furono esaminate dallo stesso Fermat sono ancora irrisolte. In certo modo tutta la matematica che ho studiato risale a Fermat, se non proprio all'Ultimo Teorema di Fermat».

Nelle equazioni che Wiles studiò durante il dottorato, determinare l'esatto numero di soluzioni era così difficile che il solo modo di fare progressi era di semplificare il problema. Per esempio è quasi impossibile affrontare direttamente la seguente equazione ellittica:

$$x^3 - x^2 = y^2 + y$$

Si tratta di scoprire quante soluzioni con numeri interi ha l'equazione. Una soluzione piuttosto banale è $x = 0$ e $y = 0$:

$$0^3 - 0^2 = 0^2 + 0$$

Una soluzione appena un po' più interessante è $x = 1$ e $y = 0$:

$$1^3 - 1^2 = 0^2 + 0$$

Possono esserci altre soluzioni ma, con un'infinità di numeri interi da esplorare, dare un elenco completo di soluzioni per questa equazione particolare è un compito impossibile. Un compito più semplice è cercare una soluzione in un ambito numerico finito, nella cosiddetta aritmetica dell'orologio.

In precedenza abbiamo visto che i numeri possono essere pensati come punti lungo la retta numerica che si estende all'infinito, come mostra la figura 4.3. Per rendere finito lo spazio dei numeri, l'aritmetica dell'orologio richiede di troncare la retta e di piegarla su se stessa fino a formare un anello numerico al posto della retta numerica. La figura 4.4 mostra un orologio-5, nel quale la retta numerica è stata troncata al numero 5 e richiusa su se stessa allo 0. Il numero 5 svanisce e diventa equivalente a 0. Perciò i soli numeri nell'aritmetica dell'orologio-5 sono 0, 1, 2, 3, 4.

Figura 4.3: L'aritmetica convenzionale può essere pensata come una serie di spostamenti avanti e indietro lungo la retta numerica.

Nell'aritmetica normale possiamo pensare all'addizione come a uno spostamento lungo la retta di un certo numero di spazi. Per esempio 4 + 2 = 6 è lo stesso che dire: comincia al 4, spostati lungo la retta numerica di 2 spazi e arriva al 6. Invece nell'aritmetica dell'orologio-5:

$$4 + 2 = 1$$

Se infatti cominciamo dal 4 e ci spostiamo intorno di 2 spazi, arriviamo all'1. L'aritmetica dell'orologio potrebbe apparirci poco familiare, ma in realtà la usiamo ogni giorno quando parliamo del tempo. Quattro ore dopo le undici (vale a dire 11 + 4) vengono comunemente definite non le ore 15, ma le 3. Si tratta dell'aritmetica dell'orologio-12.

Siccome l'aritmetica dell'orologio tratta solo uno spazio numerico limitato, è relativamente facile scoprire tutte le possibili soluzioni a un'equazione ellittica per un'aritmetica dell'orologio di una certa dimensione. Per esempio, adoperando l'aritmetica dell'orologio-5 è possibile elencare tutte le soluzioni possibili all'equazione ellittica

$$x^3 - x^2 = y^2 + y$$

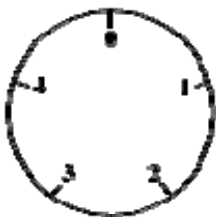


Figura 4.4: Nell'aritmetica dell'orologio-5 la retta numerica è troncata al 5 e richiusa su se stessa. Il numero 5 coincide con lo 0 e perciò viene rimpiazzato da quest'ultimo.

Le soluzioni sono:

$$x = 0, \quad y = 0,$$
$$x = 0, \quad y = 4,$$
$$x = 1, \quad y = 0,$$
$$x = 1, \quad y = 4.$$

Anche se alcune di queste soluzioni non sarebbero valide nell'aritmetica normale, esse sono accettabili nell'aritmetica dell'orologio-5. Per esempio, la quarta soluzione ($x = 1$, $y = 4$) funziona così:

$$x^3 - x^2 = y^2 + y$$
$$1^3 - 1^2 = 4^2 + 4$$
$$1 - 1 = 16 + 4$$
$$0 = 20$$

Ma ricordate che nell'aritmetica dell'orologio-5, 20 equivale a 0 perché 5 divide il 20 con un resto di 0.

Siccome non era possibile elencare tutte le soluzioni di un'equazione ellittica oprando su uno spazio infinito, i matematici, compreso Wiles, decisero di scoprire il numero di soluzioni in tutte le differenti aritmetiche dell'orologio. Per l'equazione ellittica sopra citata il numero di soluzioni nell'aritmetica dell'orologio-5 è quattro e perciò i matematici dicono $E_5 = 4$. Si può anche calcolare il numero di soluzioni in altre aritmetiche dell'orologio. Per esempio, nell'aritmetica dell'orologio-7 il numero di soluzioni è nove e perciò $E_7 = 9$.

Per ricapitolare i risultati raggiunti, i matematici elencano il numero di soluzioni per ogni aritmetica dell'orologio e chiamano questo elenco la *L*-serie dell'equazione ellittica. Da tempo si è dimenticato il significato della *L* anche se alcuni hanno ipotizzato che la *L* sta per Gustav Lejeune-Dirichlet, che ha lavorato sulle equazioni ellittiche. Per chiarezza espositiva userò il termine *E*-serie, per riferirmi alla serie di soluzioni dell'equazione ellittica nei diversi tipi di aritmetica dell'orologio. Per l'esempio di equazione sopra citato la *E*-serie è la seguente:

Equazione ellittica:

$$x^3 - x^2 = y^2 + y;$$

E-serie:
$$E_1 = 1,$$
$$E_2 = 4$$
$$E_3 = 4$$
$$E_4 = 8$$
$$E_5 = 4$$
$$E_6 = 16$$
$$E_7 = 9$$
$$E_8 = 16$$
$$\ldots$$

Poiché i matematici non sanno dire quante soluzioni hanno alcune equazioni ellittiche nel normale spazio numerico che si estende fino all'infinito, la *E*-serie sembra essere la migliore risposta possibile al problema. Infatti la *E*-serie contiene una gran massa di informazioni sull'equazione ellittica da essa descritta. Allo stesso modo in cui il Dna trasporta tutte le informazioni necessarie per costruire un organismo vivente, la *E*-serie enuclea l'essenza dell'equazione ellittica. La speranza era che studiando la *E*-serie, questa sorta di Dna matematico, i matematici avrebbero potuto infine calcolare tutto ciò che desideravano conoscere su un'equazione ellittica.

Lavorando con John Coates, Wiles si costruì rapidamente una reputazione di brillante teorico dei numeri con una profonda conoscenza delle equazioni ellittiche e delle loro *E*-serie. Mentre raggiungeva nuovi risultati e pubblicava nuovi articoli, Wiles non si rendeva conto che stava accumulando l'esperienza che molti anni dopo lo avrebbe portato sul punto di dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat.

Anche se nessuno all'epoca ne era consapevole, la matematica nel Giappone del dopoguerra aveva già innescato una catena di eventi che avrebbero collegato inestricabilmente le equazioni ellittiche all'Ultimo Teorema di Fermat. Invitando Wiles a studiare le equazioni ellittiche, Coates gli aveva dato gli strumenti che in seguito gli avrebbero permesso di lavorare alla realizzazione del suo sogno.

5
DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO

> Le forme create dal matematico, come quelle create dal pittore o dal poeta, devono essere belle; le idee, come i colori o le parole, devono legarsi armoniosamente. La bellezza è il requisito fondamentale: al mondo non c'è un posto perenne per la matematica brutta.
>
> G.H. Hardy

Nel gennaio del 1954 un giovane e dotato matematico dell'Università di Tokyo si recò come tante altre volte alla biblioteca del suo dipartimento. Goro Shimura cercava una copia del ventiquattresimo volume dei *Mathematische Annalen*. In particolare gli interessava un articolo di Deuring sulla teoria algebrica della moltiplicazione complessa, di cui aveva bisogno per completare un calcolo particolarmente difficile e astruso.

Con sorpresa e disappunto Shimura scoprì che il volume era già in prestito. Ne aveva fatto richiesta Yutaka Taniyama, una sua vaga conoscenza che viveva dall'altra parte del campus. Shimura scrisse a Taniyama spiegandogli che aveva urgente bisogno del fascicolo per completare quel calcolo antipatico, e gli chiedeva con gentilezza quando lo avrebbe restituito.

Pochi giorni più tardi sulla scrivania di Shimura arrivò una cartolina. Taniyama gli rispondeva spiegandogli che anche lui stava lavorando allo stesso calcolo e che si era bloccato sullo stesso passaggio logico. Gli proponeva di scambiarsi le proprie idee e magari di lavorare insieme sul problema. Da questo incontro casuale avvenuto grazie a un libro e a una biblioteca scaturì una collaborazione che avrebbe cambiato il corso della storia della matematica.

Taniyama era nato il 12 novembre 1927 in una cittadina situata pochi chilometri a nord di Tokyo. L'ideogramma giapponese che simboleggiava il suo nome di battesimo avrebbe dovuto essere letto «Toyo», ma la maggior parte delle persone che non appartenevano alla sua famiglia lo interpretavano male, leggendolo come «Yutaka»; crescendo, Taniyama accettò di essere chiamato con quel nome e decise di adottarlo. L'istruzione scolastica di Yutaka Taniyama aveva subito continue interruzioni: da bambino era spesso ammalato e negli anni dell'adolescenza fu colpito dalla tubercolosi, così che dovette perdere due anni di scuola superiore. Lo scoppio della guerra provocò danni anche maggiori alla sua carriera di studente.

Negli anni di guerra l'istruzione scolastica di Goro Shimura, che aveva un anno meno di Taniyama, si interruppe del tutto. La sua scuola fu distrutta, e invece di

assistere alle lezioni Shimura dovette contribuire allo sforzo bellico lavorando in fabbrica: assemblava parti di aeroplani. La sera studiava da solo per cercare di riguadagnare il tempo perduto, e scoprì di essere particolarmente attratto dalla matematica. «Naturalmente c'erano molte materie da imparare, ma la matematica era la più facile, dato che mi era sufficiente leggere i libri di testo. Ho appreso il calcolo infinitesimale leggendo i libri. Se avessi voluto continuare gli studi in chimica o in fisica avrei avuto bisogno di attrezzatura scientifica e non avevo alcuna possibilità di procurarmela. Non pensai mai di avere talento, ero soltanto curioso.»

Pochi anni dopo la fine della guerra, Shimura e Taniyama si ritrovarono all'università. Al tempo in cui si erano scambiati le cartoline per il volume della biblioteca, la vita a Tokyo stava cominciando a tornare alla normalità e i due giovani studiosi potevano permettersi qualche piccolo lusso. Trascorrevano i pomeriggi nei caffè, la sera cenavano in un piccolo ristorante specializzato in piatti a base di carne di balena, e durante i fine settimana avevano l'abitudine di passeggiare nei giardini botanici o nel parco cittadino. Tutti luoghi ideali per discutere le loro ultime idee matematiche.

Benché Shimura possedesse una vena di bizzarria - ancora oggi conserva la sua passione per le storielle Zen - aveva un carattere molto più tradizionalista e convenzionale rispetto al suo collega e amico. Shimura si alzava all'alba e si buttava immediatamente sul lavoro, mentre a quell'ora Taniyama era ancora sveglio dopo aver lavorato per tutta la notte. Spesso chi passava dal suo appartamento lo trovava profondamente addormentato a metà pomeriggio.

Se Shimura era meticoloso, Taniyama era trascurato fino all'indolenza. Sorprendentemente Shimura ammirava questo suo tratto: «Lui era dotato della capacità speciale di fare molti errori, per lo più nella direzione giusta. Lo invidiavo per questo, e tentavo invano di imitarlo, ma mi era molto difficile fare buoni errori».

Taniyama era l'epitomo del genio con la testa fra le nuvole, e ciò si rifletteva sul suo aspetto esteriore. Era incapace di fare un nodo decente e aveva quindi deciso che piuttosto che allacciarsi le scarpe una dozzina di volte al giorno non le avrebbe allacciate affatto. Indossava sempre lo stesso caratteristico vestito verde che emanava strani riflessi metallici. Il tessuto con cui era stato confezionato era così stravagante che tutti gli altri membri della sua famiglia si erano rifiutati di usarlo.

Quando si incontrarono, nel 1954, la carriera matematica di Shimura e Taniyama stava appena cominciando. Era tradizione, ed è tutt'ora così, che i giovani ricercatori fossero presi sotto l'ala protettiva di un professore che avrebbe guidato le loro menti inesperte, ma Taniyama e Shimura rifiutarono questa forma di apprendistato. Durante la guerra la ricerca pura si era arenata, e negli anni Cinquanta la facoltà di matematica non si era ancora ripresa. Secondo Shimura i professori erano «stanchi, nauseati e disillusi». Al confronto, gli studenti del dopoguerra erano pieni di entusiasmo e ansiosi di apprendere, e presto si resero conto che l'unico modo di progredire era di insegnare a se stessi. Gli studenti organizzavano regolarmente seminari che tenevano a turno per informarsi a vicenda sulle ultime tecniche e sui progressi recenti. A dispetto dell'atteggiamento apatico che aveva in altre circostanze, quando Taniyama partecipava ai seminari vi infondeva una tremenda energia. Incoraggiava gli studenti

degli ultimi anni ad avventurarsi in territori inesplorati e assumeva il ruolo di figura paterna per gli studenti più giovani.

A causa del loro isolamento, a volte i seminari vertevano su temi che in Europa e in America erano generalmente ritenuti ormai superati. L'inesperienza degli studenti li portava a studiare equazioni che in Occidente erano state abbandonate. Un argomento particolarmente fuori moda che affascinava tanto Taniyama quanto Shimura era lo studio delle forme modulari.

Le forme modulari sono fra gli oggetti matematici più misteriosi e affascinanti. Esse rappresentano una delle entità più astruse della matematica, eppure nel ventesimo secolo il teorico dei numeri Martin Eichler le classificò come una delle cinque operazioni fondamentali: addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione e forme modulari. Probabilmente la maggioranza dei matematici ritiene di avere una completa padronanza delle prime quattro operazioni, ma trova la quinta ancora un po' sconcertante.

L'aspetto fondamentale delle forme modulari è il loro grado smisurato di simmetria. Benché gran parte delle persone abbia familiarità con il concetto quotidiano di simmetria, nel campo della matematica esso ha un significato molto particolare: un oggetto è dotato di simmetria se può essere trasformato in un determinato modo e apparire invariato dopo la trasformazione. Per apprezzare l'immensa simmetria di una forma modulare è utile esaminare prima la simmetria di un oggetto più banale, come ad esempio un semplice quadrato.

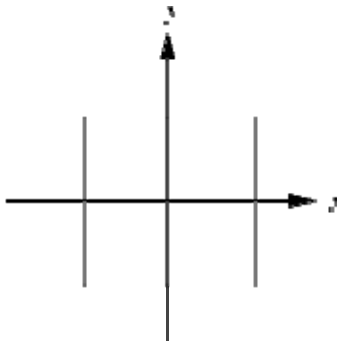


Figura 5.1: Un semplice quadrato mostra sia una simmetria di rotazione sia una simmetria di riflessione.

Un quadrato è dotato di simmetria rotazionale. Ciò significa che, se immaginiamo un perno posto nel punto in cui l'asse delle x e l'asse delle y si incontrano, allora il quadrato della figura 5.1 può essere ruotato di un quarto di giro ed apparire invariato dopo la rotazione. Analogamente, rotazioni di mezzo giro, di tre quarti di giro e di un giro intero lasceranno il quadrato in apparenza invariato.

Oltre alla simmetria rotazionale il quadrato possiede anche una simmetria di riflessione. Se immaginiamo uno specchio posto perpendicolarmente al foglio lungo l'asse delle x, allora la metà superiore del quadrato si rifletterà esattamente nella metà inferiore e viceversa, cosicché dopo la trasformazione il quadrato apparirebbe invariato. Analogamente possiamo definire tre altri specchi (lungo l'asse delle y e

lungo le due diagonali) tali che il quadrato riflesso apparirebbe identico a quello originale.

Un semplice quadrato è relativamente simmetrico, dato che possiede simmetrie sia di rotazione sia di riflessione, ma esso non possiede alcuna simmetria di traslazione. Questo significa che se il quadrato dovesse essere spostato in una qualsiasi direzione, un osservatore individuerebbe immediatamente il movimento poiché sarebbe cambiata la sua posizione relativa agli assi. Tuttavia, se l'intero piano definito dall'asse delle x e dall'asse delle y fosse suddiviso in piastrelle quadrate, come mostrato nella figura 5.2, questo insieme infinito di quadrati avrebbe allora una simmetria di traslazione. Se l'infinita superficie divisa in piastrelle fosse spostata in su o in giù di uno spazio pari a uno o più quadrati apparirebbe invariata rispetto alla posizione originale.

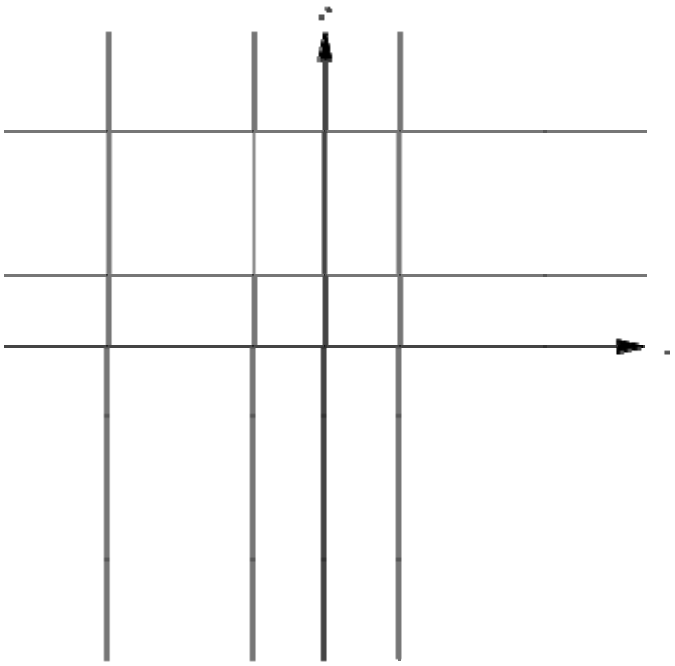


Figura 5.2: Una superficie infinita divisa in quadrati possiede una simmetria di rotazione, di riflessione, e in più ha una simmetria di traslazione.

La simmetria delle superfici divise in piastrelle è un'idea relativamente semplice, ma come per molti concetti in apparenza semplici, in essa si nascondono molte idee sottili. Ad esempio, negli anni Settanta il fisico inglese Roger Penrose, che si occupa anche di matematica ricreativa, cominciò a dilettarsi a dividere la stessa superficie con piastrelle di forma diversa. Alla fine egli identificò due forme particolarmente interessanti, chiamate l'aquilone e la freccia, che sono mostrate nella figura 5.3. Da sola ciascuna di queste forme non poteva essere usata per ricoprire una superficie senza lasciare spazi vuoti o causare sovrapposizioni, ma insieme potevano essere usate per creare un ricco insieme di schemi per ricoprire la superficie. Gli aquiloni e le frecce possono essere sistemati sulla superficie in un numero infinito di modi, e anche se tutti gli schemi appaiono simili, quando li si osserva con attenzione si nota che ognuno è diverso dagli altri. Uno di tali schemi è mostrato nella figura 5.3.

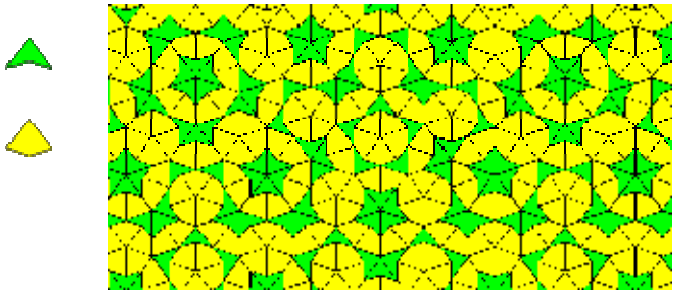


Figura 5.3: Usando due differenti piastrelle, l'aquilone e la freccia, Roger Penrose riuscì a ricoprire una superficie. Tuttavia la cosiddetta «tassellatura di Penrose» non possiede una simmetria di traslazione.

Un'altra caratteristica notevole delle «tassellature di Penrose» (gli schemi di ricopertura di una superficie generati da piastrelle come gli aquiloni e le frecce) è che esse possiedono un grado di simmetria molto limitato. A prima vista sembrerebbe che la tassellatura mostrata nella figura 5.3 possieda una simmetria di traslazione, e tuttavia Ogni tentativo di spostare lo schema in modo tale che esso rimanga effettivamente invariato fallisce. Le tassellature di Penrose possiedono un'asimmetria che ci trae in inganno, e questo è il motivo per cui esse affascinano i matematici, tanto che sono diventate il punto di partenza di un'intera nuova area della matematica.

Se il fascino delle superfici a tasselli di Penrose risiede nella loro simmetria limitata, la proprietà interessante delle forme modulari è che esse possiedono una simmetria infinita. Le forme modulari studiate da Taniyama e Shimura possono essere ribaltate, girate, riflesse e ruotate in un numero infinito di modi rimanendo sempre invariate, il che le rende gli oggetti matematici più simmetrici.

Purtroppo disegnare, o anche solo immaginare, una forma modulare è impossibile. Nel caso di una superficie divisa in quadrati, abbiamo un oggetto che esiste in uno spazio bidimensionale, definito da due assi, l'asse x e l'asse y. Anche una forma modulare ha due dimensioni, ma a ciascuna di queste dimensioni corrisponde un piano complesso, cioè un piano definito da un asse reale e da un asse immaginario. Perciò il primo piano complesso è rappresentato da due assi, l'asse x_r (reale) e l'asse x_i (immaginario), e il secondo piano complesso è rappresentato da altri due assi, l'asse y_r (reale) e l'asse y_i (immaginario). Dunque in realtà le forme modulari esistono in uno spazio complesso. Per essere precisi, le forme modulari esistono nella metà superiore di questo spazio complesso, ma la cosa più importante da notare è che tale spazio è quadridimensionale (x_r, x_i, y_r, y_i).

Questo spazio quadridimensionale è chiamato spazio iperbolico. L'universo iperbolico è difficile da comprendere per gli uomini, che sono costretti a vivere in un mondo convenzionale a tre dimensioni, ma quello di spazio quadridimensionale è un concetto matematicamente valido, ed è proprio questa dimensione in più che conferisce alle forme modulari un grado enormemente alto di simmetria.

Le forme modulari che esistono nello spazio iperbolico hanno varie forme e dimensioni, ma sono tutte costituite dagli stessi ingredienti fondamentali. Ciò che

rende diversa ciascuna forma modulare è la quantità di ciascun ingrediente che essa contiene. Gli ingredienti di una forma modulare sono numerati da uno all'infinito (M_1,M_2,M_3,M_4,...) e quindi una data forma modulare potrebbe contenere una parte del primo ingrediente ($M_1 = 1$), tre parti del secondo ingrediente ($M_2 = 3$), due parti del terzo ingrediente ($M_2 = 2$) eccetera. Queste informazioni, che descrivono come è costruita una forma modulare, possono essere riassunte in quella che si definisce una serie modulare, o M-serie, cioè in un elenco degli ingredienti e delle rispettive quantità richieste:

M-serie: $M_1 = 1$
$M_2 = 3$
$M_3 = 2$
…

Proprio come la *E*-serie è il Dna per le equazioni ellittiche, la *M*-serie è il Dna per le forme modulari. La quantità di ciascun ingrediente elencato nella M-serie è di importanza critica. A seconda di come si cambi la quantità, ad esempio, del primo ingrediente, si potrebbe generare una forma modulare completamente diversa, ma ugualmente simmetrica, oppure si potrebbe distruggere del tutto la simmetria e generare un nuovo oggetto che non è una forma modulare. In altre parole, per creare una forma modulare la quantità di ciascun ingrediente è assolutamente critica. Se la quantità di ogni ingrediente è scelta ad arbitrio, allora il risultato sarà con tutta probabilità un oggetto dotato di simmetria scarsa o nulla.

All'interno della matematica le forme modulari costituiscono un argomento a sé stante. In particolare esse sembrerebbero non avere assolutamente alcun rapporto con l'argomento studiato da Wiles a Cambridge, le equazioni ellittiche. Le forme modulari sono un mostro di enorme complessità, studiate, in larga misura, a causa della loro simmetria, e scoperte soltanto nel diciannovesimo secolo. Le equazioni ellittiche risalgono agli antichi greci e non hanno nulla a che vedere con la simmetria. Le forme modulari e le equazioni ellittiche risiedono in regioni completamente diverse dell'universo matematico e nessuno avrebbe mai pensato che ci fosse la minima connessione fra i due argomenti. Tuttavia, Taniyama e Shimura dovevano provocare uno shock nella comunità dei matematici suggerendo che le equazioni ellittiche e le forme modulari erano in realtà esattamente la stessa cosa. Questi due matematici indipendenti sostenevano di essere in grado di unificare il mondo modulare e quello ellittico.

Soltanto un'illusione

Nel settembre 1955 si tenne a Tokyo un convegno internazionale di matematica. Per i giovani ricercatori giapponesi era un'occasione unica di mostrare al resto del

mondo ciò che avevano appreso. Distribuirono ai partecipanti una raccolta di trentasei problemi relativi al loro lavoro, accompagnati da poche umili righe di introduzione: «Alcuni problemi di matematica insoluti. Non è stata compiuta alcuna preparazione approfondita, così che fra di essi ce ne potrebbero essere alcuni banali oppure già risolti. Ai partecipanti si chiede di fornire commenti su ognuno di questi problemi».

Quattro dei quesiti erano proposti da Taniyama, e suggerivano l'esistenza di una curiosa relazione tra forme modulari ed equazioni ellittiche. Questi quesiti innocenti avrebbero finito per portare a una rivoluzione nella teoria dei numeri. Taniyama aveva esaminato i primi termini della *M*-serie di una particolare forma modulare. Egli riconobbe l'andamento della serie e si rese conto che ricalcava esattamente quello della *E*-serie di un'equazione ellittica ben nota. Calcolò pochi altri termini delle due serie: la *M*-serie della forma modulare e la *E*-serie dell'equazione ellittica coincidevano ancora alla perfezione.

Era una scoperta sensazionale poiché, senza che ce ne fosse alcuna ragione evidente, quella forma modulare poteva essere messa in relazione con un'equazione ellittica attraverso le rispettive *M*-serie ed *E*-serie: le due serie erano identiche. Il Dna matematico che dava forma alle due entità era esattamente lo stesso. Ciò costituiva una scoperta doppiamente profonda. In primo luogo suggeriva l'esistenza nascosta di una relazione fondamentale fra la forma modulare e l'equazione ellittica, oggetti che venivano da sponde opposte della matematica. In secondo luogo significava che i matematici, che già conoscevano la *M*-serie per la forma modulare, non avrebbero avuto bisogno di calcolare la *E*-serie per l'equazione ellittica poiché essa sarebbe stata identica alla *M*-serie.

Da un punto di vista creativo le relazioni fra due argomenti in apparenza diversi sono importanti in matematica tanto quanto lo sono in qualsiasi disciplina. La relazione suggerisce l'esistenza di una verità sottostante che arricchisce entrambi gli argomenti. Ad esempio, gli scienziati avevano studiato l' elettricità e il magnetismo come due fenomeni completamente separati. Poi, nel diciannovesimo secolo, fisici teorici e sperimentali si resero conto che esisteva uno stretto collegamento fra elettricità e magnetismo. Ne derivò una comprensione più approfondita di entrambi. La corrente elettrica genera campi magnetici, mentre un magnete posto vicino a dei fili elettrici può indurvi una corrente. Ciò portò all'invenzione delle dinamo e dei motori elettrici, e infine alla scoperta del fatto che la luce stessa è il risultato dell'oscillazione congiunta di un campo elettrico e di un campo magnetico.

Taniyama esaminò qualche altra forma modulare, e in ciascun caso la *M*-serie sembrava corrispondere perfettamente alla *E*-serie di un'equazione ellittica. Egli cominciò a chiedersi se ci fosse la possibilità che ogni singola forma modulare potesse essere associata a un'equazione ellittica. Forse ogni forma modulare aveva lo stesso Dna di un'equazione ellittica: forse ogni forma modulare era un'equazione ellittica mascherata. I quesiti che aveva distribuito al convegno erano relativi a questa ipotesi.

L'idea che ogni equazione ellittica fosse legata a una forma modulare era così straordinaria che coloro i quali diedero un'occhiata ai quesiti di Taniyama li considerarono come nient'altro che osservazioni curiose. Non c'era dubbio che

Taniyama avesse dimostrato il fatto che qualche equazione ellittica poteva essere legata a una particolare forma modulare ma, sostenevano gli scettici, si trattava semplicemente di una coincidenza. A loro giudizio, l'esistenza di una relazione più generale e universale, sostenuta da Taniyama, appariva ben poco fondata. L'ipotesi si basava più su una intuizione che su qualsiasi avidenza reale.

L'unico alleato di Taniyama era Shimura, che credeva nella forza e nella profondità dell'idea del suo amico. Dopo il convegno egli intendeva collaborare con Taniyama per sviluppare l'ipotesi a un livello tale che il resto del mondo non avrebbe più potuto ignorare il loro lavoro. Shimura intendeva trovare altre prove a sostegno della relazione fra il mondo modulare e quello ellittico. La collaborazione si interruppe temporaneamente nel 1957, quando Shimura fu inviato presso l'Institute for Advanced Study di Princeton, negli Stati Uniti. Secondo le sue intenzioni, una volta trascorsi i deu anni come docente ospite, Shimura avrebbe ripreso a lavorare con Taniyama, ma ciò non potè mai accadere. Il 17 novembre del 1958 Yukuta Taniyama si suicidò.

Morte di un genio

Shimura conserva ancora la cartolina che Taniyama gli mandò quando entrarono in contatto la prima volta grazie al libro della biblioteca universitaria. Conserva anche l'ultima lettera che Taniyama gli scrisse a Princeton, ma essa non contiene il minimo indizio di ciò che sarebbe successo solo due mesi più tardi.

A tutt'oggi Shimura non ha idea dei motivi del suicidio di Taniyama. «Ero davvero molto perplesso. Perplessità è probabilmente la parola più giusta. Naturalmente ero triste ma, vede, fu una cosa improvvisa. Ricevetti la lettera a settembre e lui morì all'inizio di novembre, e io non ero in grado di darvi un senso. Naturalmente in seguito venni a sapere molte cose e tentai di riconciliarmi con la sua morte. Alcune persone mi dissero che aveva perso fiducia in se stesso, ma non per quanto riguarda la matematica.»

Ciò che soprattutto sconcertava i suoi amici era il fatto che Taniyama si era appena innamorato di Misako Suzuki e che progettava di sposarla entro l'anno. In un ricordo personale dell'amico pubblicato sul Bulletin of the London Mathematical Society Goro Shimura rievoca il fidanzamento di Taniyama con Misako e le settimane che precedettero il suo suicidio:

> Quando fui informato del loro fidanzamento rimasi piuttosto sorpreso, dato che avevo avuto la vaga sensazione che lei non fosse il suo tipo, ma non ebbi alcun cattivo presentimento. Mi fu detto in seguito che avevano firmato un contratto d'affitto per un appartamento, evidentemente uno migliore, destinato a diventare la loro nuova casa, che avevano comprato una batteria da cucina, e che si stavano preparando per il matrimonio. Tutto sembrava promettente per loro e per i loro amici. Poi accadde la catastrofe.

La mattina di lunedì 17 novembre 1958, il custode di casa lo trovò morto nella sua stanza, insieme a un messaggio lasciato sulla scrivania. Era scritto su tre pagine di un quaderno del tipo che usava per il suo lavoro universitario; nel primo paragrafo si legge: «Fino a ieri non avevo alcuna precisa intenzione di uccidermi. Ma non pochi devono aver notato che negli ultimi tempi sono stato fisicamente e mentalmente stanco. Quanto al motivo del mio suicidio, non lo comprendo affatto nemmeno io, ma non è il risultato di un episodio particolare, né di un fatto specifico. Posso solo dire che sento di aver perso fiducia nel futuro. Può darsi che ci sia una persona a cui il mio suicidio potrebbe, in una certa misura, arrecare sofferenza o colpire. Spero sinceramente che questo episodio non getterà ombre sul futuro di questa persona. A ogni modo, non posso negare che questo mio gesto sia una sorta di tradimento, ma vi prego di scusarlo come l'ultimo atto che ho compiuto a modo mio, così come ho sempre fatto a modo mio in tutta la mia vita».

Egli proseguiva descrivendo, in modo molto metodico, le sue volontà riguardo alla sistemazione dei suoi beni, quali libri e quali dischi aveva ricevuto in prestito dalla biblioteca o dagli amici e così via. In particolare scrive: «Vorrei lasciare i dischi e il giradischi a Misako Suzuki, sempre che non sia turbata dal fatto che li lasci a lei». Inoltre spiega a che punto era arrivato nello svolgimento del programma dei corsi di analisi matematica e di algebra lineare che stava tenendo all'università, e conclude la nota scusandosi con i colleghi per gli inconvenienti che il suo atto avrebbe potuto causare.

Così una delle menti più brillanti e innovatrici del tempo poneva volontariamente fine alla propria vita. Aveva compiuto trentun anni solo cinque giorni prima.

Poche settimane dopo il suicidio di Taniyama, la tragedia si abbatté una seconda volta. Anche la sua fidanzata, Misako Suzuki, si tolse la vita. A quanto si racconta, lasciò un biglietto che diceva: «Ci promettemmo a vicenda che, ovunque fossimo andati, non ci saremmo mai separati. Ora che se *n*'è andato, devo farlo anch'io, così da potermi ricongiungere a lui».

Filosofia della bontà

Nel corso della sua breve carriera Taniyama contribuì alla matematica con molte idee radicali. I quesiti che aveva distribuito al convegno contenevano la sua più grande intuizione, ma essa era così in anticipo sui tempi che egli non sarebbe vissuto abbastanza per vedere l'enorme influenza che ebbe sulla teoria dei numeri. La sua creatività intellettuale era destinata a essere amaramente rimpianta, insieme al suo ruolo di guida nell'ambito della comunità dei giovani scienziati giapponesi. Shimura ha un chiaro ricordo dell'influenza di Taniyama: «Era sempre gentile con i colleghi, soprattutto con quelli più giovani, e si occupava in modo sincero del loro benessere. Era il sostegno morale per molti di quelli che entravano in contatto con lui

nell'ambito della matematica, me compreso naturalmente. Probabilmente non fu mai conscio di questo suo ruolo. Ma io mi rendo conto della sua nobile generosità da questo punto di vista oggi più di quando lui era vivo. Eppure nessuno fu in grado di dargli aiuto quando ne aveva un disperato bisogno. Riflettendo su questo, mi sento sopraffare dalla più profonda angoscia».

Dopo la morte di Taniyama, Shimura concentrò i suoi sforzi sulla comprensione dell'esatta relazione fra equazioni ellittiche e forme modulari. Mentre gli anni passavano egli si sforzò di raccogliere maggiori prove e qualche supporto logico alla teoria. Poco alla volta Shimura si convinse sempre più che ogni singola equazione ellittica doveva essere correlata a una forma modulare. Altri matematici erano ancora perplessi, e Shimura ricorda una conversazione con un eminente collega. «A quanto sento,» lo interrogò il professore «lei propone che alcune equazioni ellittiche possono essere legate a forme modulari.»

«No, lei non ha capito» rispose Shimura. «Non si tratta solo di qualche equazione ellittica, ma di tutte le equazioni ellittiche!» Shimura non fu ingrado di dimostrare che era effettivamente così, ma ogni volta che la verificava, l'ipotesi sembrava essere confermata, e in ogni caso sembrava accordarsi alla sua concezione filosofica della matematica. «Ho questa filosofia della bontà. La matematica dovrebbe avere un contenuto di bontà. Così, nel caso delle equazioni ellittiche, si potrebbe definire l'equazione buona se è parametrizzata da una forma modulare. Mi aspetto che tutte le equazioni ellittiche siano buone. È una filosofia piuttosto grossolana ma la si può comunque prendere come punto di partenza. Naturalmente poi devo elaborare varie ragioni tecniche che giustificassero la congettura. Potrei dire che la congettura traeva origine dalla filosofia della bontà. La gran parte dei matematici ha un punto di vista estetico su cui basarsi, e dal mio punto di vista estetico discende la filosofia della bontà.»

Alla fine, grazie al cumulo di prove raccolte da Shimura, la sua teoria delle equazioni ellittiche e delle forme modulari fu accettata in un ambito più vasto. Egli non poteva dimostrare al resto del mondo che era vera, ma per lo meno adesso non era più soltanto un'illusione. C'erano prove sufficienti per renderla degna del titolo di congettura. Da principio fu chiamata congettura di Taniyama-Shimura in onore dell'uomo che l'aveva ispirata e del suo collega che l'aveva sviluppata pienamente.

Più tardi André Weil, uno dei padri della teoria dei numeri del ventesimo secolo, avrebbe adottato la congettura e l'avrebbe fatta conoscere all'Occidente. Weil studiò l'idea di Shimura e Taniyama e trovò prove ancora più solide in suo favore. Di conseguenza spesso si fa riferimento all'ipotesi come congettura di Taniyama-Shimura-Weil, talvolta come congettura Taniyama-Weil, e in qualche occasione come congettura di Weil. In effetti ci sono stati numerosi dibattiti e controversie sul nome ufficiale da attribuire alla congettura. Per chi fosse interessato al calcolo combinatorio, ci sono quindici permutazioni possibili dei tre nomi coinvolti, ed è molto probabile che nel corso degli anni ognuna di esse sia apparsa su qualche pubblicazione. Io tuttavia farò riferimento alla congettura usando il suo nome originale, congettura di Taniyama-Shimura.

Il professor John Coates, che fu la guida di Andrew Wiles quando questi era studente, era egli stesso uno studente quando la congettura di Taniyama-Shimura

divenne un argomento di discussione in Occidente. «Cominciai a svolgere attività di ricerca nel 1966, quando la congettura di Taniyama e Shimura stava diventando nota in tutto il mondo. Tutti ne erano affascinati e cominciarono a considerare l'eventualità che ogni equazione ellittica potesse essere modulare. Fu un periodo tremendamente eccitante; il solo problema era dato dal fatto che ovviamente era molto arduo compiere progressi. Penso sia giusto dire che, per quanto quell'idea fosse stupenda, in realtà sembrava molto difficile dimostrarla, e che era proprio questo a costituire il principale interesse per noi matematici.»

Nei tardi anni Sessanta torme di matematici verificarono ripetutamente la congettura di Taniyama-Shimura. Partendo da un'equazione ellittica e dalla sua E-serie, cercavano una forma modulare che avesse una M-serie identica. Di fatto, in ogni singolo caso l'equazione ellittica aveva una forma modulare associata. Benché ciò costituisse una buona prova a favore della congettura, non era affatto una dimostrazione. I matematici sospettavano che l'ipotesi fosse vera, ma finché qualcuno non fosse riuscito a trovare una dimostrazione logica, essa sarebbe rimasta semplicemente una congettura.

Barry Mazur, un professore della Harvard University, fu testimone dell'ascesa della congettura di Taniyama-Shimura. «Era un'ottima congettura - la supposizione che ogni equazione ellittica sia associata a una forma modulare - ma all'inizio venne ignorata perché era così in anticipo sul suo tempo. Quando fu proposta per la prima volta non ci se ne occupò perché era così stupefacente. Da una parte abbiamo il mondo ellittico, e dall'altra il mondo modulare. Entrambi questi rami della matematica erano stati studiati a fondo ma separatamente. Probabilmente i matematici che studiavano le equazioni ellittiche non erano molto pratici delle entità modulari e viceversa. Poi arriva la congettura di Taniyama-Shimura, cioè l'ipotesi grandiosa che esista un ponte fra questi due mondi completamente differenti. I matematici adorano costruire ponti.»

Il valore di questi ponti matematici è enorme. Essi permettono a matematici che vivono su isole separate di scambiarsi idee e di esaminare gli uni le creazioni degli altri. La matematica consiste di isole di conoscenza in un mare di ignoranza. Ad esempio, c'è un'isola abitata dagli esperti di geometria che studiano sagome e forme, e poi c'è l'isola della probabilità dove i matematici discutono di rischio e caso. Esistono dozzine di queste isole, ognuna con un suo linguaggio specifico, incomprensibile agli abitanti delle altre isole. Il linguaggio della geometria è molto diverso da quello della probabilità, e il gergo del calcolo infinitesimale non ha significato per coloro che si occupano solo di statistica.

La grande potenzialità della congettura di Taniyama-Shimura consisteva nel fatto che avrebbe collegato due isole e permesso per la prima volta una comunicazione fra di esse. Barry Mazur considera la congettura di Taniyama-Shimura uno strumento di traduzione simile alla stele di Rosetta, l'antica tavoletta su cui è incisa un'iscrizione in egizio demotico, in greco e in caratteri geroglifici. Poiché gli archeologi comprendevano già il demotico e il greco, la tavoletta permise loro di decifrare la scrittura geroglifica per la prima volta. «È come se tu conoscessi una lingua e questa stele di Rosetta sia destinata a fornirti una comprensione approfondita dell'altra lingua», dice Mazur. «Ma la congettura di Taniyama-Shimura è una stele di Rosetta

che possiede un certo potere magico. La congettura ha una caratteristica molto piacevole: semplici intuizioni nel mondo modulare si traducono in profonde verità nel mondo ellittico, e viceversa. Quel che più conta, problemi molto profondi nel mondo ellittico possono essere risolti traducendoli attraverso questa stele di Rosetta nel mondo modulare, e facendoci scoprire di avere nel mondo modulare le conoscenze e gli strumenti per trattare il problema che è stato tradotto, laddove nel mondo ellittico ci saremmo trovati in difficoltà.»

Se la congettura di Taniyama-Shimura si fosse dimostrata vera, avrebbe permesso ai matematici di affrontare problemi riguardanti le equazioni ellittiche che erano rimasti insoluti per secoli, accostandosi a essi attraverso il mondo modulare. La speranza era che fosse possibile unificare i campi delle equazioni ellittiche e delle forme modulari. Inoltre, la congettura alimentava la speranza che potessero esistere connessioni fra vari altri oggetti matematici.

Negli anni Sessanta, all'Istitute for Advanced Study di Princeton Robert Langlands fu colpito dalla potenza della congettura di Taniyama-Shimura. Anche se non era stata dimostrata, Langlands riteneva che la congettura rappresentasse soltanto un elemento di uno schema di unificazione molto più generale. Egli aveva fiducia nell'esistenza di nessi fra tutti i principali campi della matematica, e si mise a ricercare tali unificazioni. In pochi anni cominciò a emergere un certo numero di connessioni. Tutte queste congetture di unificazione erano molto più deboli e teoriche di quella di Taniyama-Shimura, ma formavano una rete intricata di connessioni ipotetiche fra molte aree della matematica. Il sogno di Langlands era di vedere queste congetture dimostrate una per una, conducendo quindi a una grande matematica unificata.

Langlands espose il suo progetto per il futuro e tentò di convincere altri matematici a partecipare a quello che divenne noto come il programma Langlands, uno sforzo congiunto volto a dimostrare le sue innumerevoli congetture. In apparenza non esisteva alcun metodo ovvio per dimostrare queste connessioni teoriche, ma se il sogno si fosse fatto realtà la ricompensa sarebbe stata enorme. Qualsiasi problema insolubile in una certa area avrebbe potuto essere trasformato in un problema analogo in un'altra area, dove sarebbe stato possibile applicarvi un intero arsenale di nuove tecniche. Se la soluzione fosse sfuggita ancora, il problema poteva essere di nuovo trasformato e trasportato in un'altra area della matematica, e così via finché non fosse stato risolto. Un giorno, secondo il programma Langlands, i matematici sarebbero stati in grado di risolvere i problemi più astrusi e spinosi spostandoli da un luogo all'altro nel paesaggio matematico.

Ma ci sarebbero state implicazioni importanti anche per le scienze applicate e per l'ingegneria. Sia che si tratti di costruire un modello delle interazioni fra quark che collidono o di scoprire il modo più efficiente di organizzare una rete di telecomunicazioni, spesso la chiave del problema consiste nell'esecuzione di un calcolo matematico. In alcuni campi della scienza e della tecnologia la complessità dei calcoli è immensa, al punto da costituire un grave intralcio per i progressi nella materia in oggetto. Se solo i matematici fossero riusciti a dimostrare la fondatezza delle congetture sulle connessioni del programma Langlands, allora si sarebbero trovate scorciatoie per la risoluzione tanto di problemi pratici quanto di quelli astratti.

Negli anni Settanta il programma Langlands era diventato un progetto per il futuro della matematica, ma questa strada per il paradiso dei risolutori di problemi era bloccata per il semplice fatto che nessuno aveva la minima idea di come dimostrare una sola delle congetture di Langlands. La congettura più fondata era ancora quella di Taniyama-Shimura e tuttavia nessuno aveva idea di come dimostrarla. Una dimostrazione della congettura di Taniyama-Shimura avrebbe rappresentato il primo passo nel programma Langlands, e come tale era diventata una delle prede più ambite nella moderna teoria dei numeri.

Nonostante il suo stato di ipotesi non dimostrata, la congettura di Taniyama-Shimura era ancora citata in centinaia di saggi di ricerca matematica in cui si studiava che cosa sarebbe successo se essa fosse stata dimostrata. I saggi cominciavano con l'enunciazione di un chiaro avvertimento: «Supponendo che la congettura di Taniyama-Shimura sia vera...», e poi continuavano abbozzando una soluzione per qualche problema irrisolto. Naturalmente anche questi risultati potevano essere solo ipotetici, dato che si basavano sull'ipotesi che fosse vera la congettura di Taniyama-Shimura. I nuovi risultati ipotetici erano a loro volta incorporati in altri risultati finchè non ci fu un'enorme quantità di matematica che si basava sulla verità della congettura di Taniyama-Shimura. Questa sola congettura era la base su cui si fondava una nuova architettura matematica completa, ma finchè non la si fosse potuta dimostrare, l'intera struttura era vulnerabile.

A quel tempo Andrew Wiles era un giovane ricercatore dell'Università di Cambridge, ed egli ricorda il senso di trepidazione che affliggeva la comunità matematica negli anni Settanta: «Costruivano sempre più congetture che si estendevano sempre più lontano nel futuro, ma si sarebbero rivelate tutte assurde se la congettura di Taniyama-Shimura non fosse stata vera. Così dovevamo dimostrare la Taniyama-Shimura per poter mostrare che tutto questo progetto che avevamo fiduciosamente tracciato per il futuro era corretto».

I matematici avevano costruito un fragile castello di carte. Essi sognavano che un giorno qualcuno avrebbe dato alla loro architettura le solide fondamenta di cui aveva bisogno. Ma vivevano anche con l'incubo che un giorno qualcuno potesse dimostrare che di fatto Taniyama e Shimura si erano sbagliati, facendo crollare al suolo due decenni di ricerche.

L'anello mancante

Nell'autunno del 1984 un gruppo selezionato di teorici dei numeri si ritrovò per un convegno a Oberwolfach, una cittadina tedesca nel cuore della Foresta Nera. La riunione verteva sulla discussione dei vari passi avanti compiuti nello studio delle equazioni ellittiche, e naturalmente di tanto intanto uno dei conferenzieri riferiva ogni minimo progresso che avesse compiuto nella dimostrazione della congettura di Taniyama-Shimura. Gerhard Frey, un matematico di Saarbrücken, pur non potendo offrire alcuna idea nuova su come affrontare la congettura, fece però un'affermazione

straordinaria: se qualcuno fosse stato in grado di dimostrarla congettura di Taniyama-Shimura, avrebbe immediatamente dimostrato anche l'Ultimo Teorema di Fermat.

Quando Frey si alzò per parlare, per prima cosa scrisse l'equazione di Fermat:

$$x^n + y^n = z^n \text{ dove } n \text{ è maggiore di 2.}$$

L'Ultimo Teorema di Fermat afferma che questa equazione non ha soluzioni in numeri interi, ma Frey esaminò che cosa sarebbe successo se l'Ultimo Teorema fosse stato falso, cioè se fosse esistita almeno una soluzione dell'equazione. Poiché Frey non sapeva affatto quale potesse essere la sua ipotetica, ed eretica, soluzione, indicò i numeri con le lettere A,B e C:

$$A^N + B^N = C^N$$

Frey procedette quindi a «riscrivere» l'equazione. Questa è una procedura matematica rigorosa che modifica l'aspetto dell'equazione senza alterarne l'integrità. Attraverso un'abile sequenza di complicate manovre Frey diede all'equazione di Fermat, con i valori della soluzione ipotetica, la forma

$$y^2 = x^3 + (A^N - B^N)\, x^2 - A^N B^N$$

Benché questa riscrittura appaia molto diversa dall'equazione originale, essa è una diretta conseguenza dell'esistenza della soluzione ipotetica. Il che significa che se, e bisogna sottolineare il «se», esiste una soluzione dell'equazione di Fermat e dunque l'Ultimo Teorema è falso, allora deve esistere anche l'equazione come è stata riscritta. All'inizio la platea non rimase particolarmente impressionata dalla riscrittura, ma poi Frey fece notare che questa nuova equazione era in effetti un'equazione ellittica, anche se piuttosto contorta e insolita. Le equazioni ellittiche hanno la forma

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

ma se poniamo

$$a = (A^N - B^N), \qquad b = 0 \qquad e \qquad c = -A^N B^N,$$

allora è facile apprezzare la natura ellittica dell'equazione di Frey.

Volgendo l'equazione di Fermat in un'equazione ellittica, Frey aveva collegato l'Ultimo Teorema di Fermat alla congettura di Taniyama-Shimura. Frey fece poi notare alla platea che la sua equazione ellittica, creata partendo da una soluzione dell'equazione di Fermat, era davvero strana. Infatti Frey affermò che la sua equazione ellittica era così strana che la sua esistenza avrebbe avuto ripercussioni devastanti per la congettura di Taniyama-Shimura.

Bisogna ricordare che l'equazione ellittica di Frey è soltanto un'equazione fantasma. Condizione per la sua esistenza è il fatto che l'Ultimo Teorema di Fermat sia falso. Tuttavia, se l'equazione ellittica di Frey esiste veramente, allora è così strana che sembrerebbe impossibile metterla in relazione con una forma modulare. Ma la congettura di Taniyama-Shimura asserisce che *ogni* equazione ellittica deve essere correlata a una forma modulare. Perciò l'esistenza dell'equazione ellittica di Frey si oppone alla verità della congettura di Taniyama-Shimura.

In altre parole, l'argomentazione di Frey era la seguente:

1. Se (e solo se) l'Ultimo Teorema di Fermat è falso, allora l'equazione ellittica di Frey esiste.
2. L'equazione ellittica di Frey è così strana che non può in nessun caso essere modulare.
3. La congettura di Taniyama-Shimura afferma che ogni equazione ellittica deve essere modulare.
4. Quindi la congettura di Taniyama-Shimura deve essere falsa!

Ancora più importante è il fatto che Frey poteva, in alternativa, condurre la sua argomentazione al contrario:

1. Se è possibile dimostrare che la congettura di Taniyama-Shimura è vera, allora ogni equazione ellittica deve essere modulare.
2. Se ogni equazione ellittica deve essere modulare, allora l'equazione ellittica di Frey non può esistere.
3. Se l'equazione ellittica di Frey non esiste, allora l'equazione di Fermat non può avere soluzioni.
4. Quindi l'Ultimo Teorema di Fermat è vero!

Gerhard Frey era giunto alla conclusione sensazionale che la validità dell'Ultimo Teorema di Fermat sarebbe stata una conseguenza immediata della dimostrazione della congettura di Taniyama-Shimura. Frey affermava in sostanza che se i matematici fossero riusciti a dimostrare la congettura di Taniyama-Shimura, avrebbero automaticamente dimostrato l'Ultimo Teorema di Fermat. Per la prima volta in cent'anni il problema matematico più difficile del mondo sembrava vulnerabile. Secondo Frey la dimostrazione della congettura di Taniyama-Shimura era il solo ostacolo da superare per riuscire a dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat.

Benché fossero impressionati dalla brillante intuizione di Frey, i matematici che assistevano alla conferenza furono colpiti da un errore elementare nel suo ragionamento. Quasi tutti nell'auditorio, eccetto lo stesso Frey, lo avevano individuato. L'errore non sembrava grave, ma cosi com'era il lavoro di Frey era comunque incompleto. Chiunque fosse riuscito a correggere l'errore per primo si sarebbe preso il merito di aver collegato Fermat a Taniyama-Shimura.

I colleghi che avevano ascoltato Frey si precipitarono fuori dalla sala delle conferenze e si diressero verso la stanza delle fotocopie. Spesso l'importanza di una comunicazione si può valutare osservando la lunghezza della coda di persone in attesa di fare le copie del testo della conferenza. Una volta che ebbero uno schema completo delle idee di Frey, i partecipanti al convegno tornarono ai propri istituti e cercarono di colmare la lacuna.

Il ragionamento di Frey si basava sul fatto che la sua equazione ellittica era cosi strana che non poteva essere modulare. Il suo lavoro era incompleto perché egli non aveva affatto dimostrato che la sua equazione fosse sufficientemente strana. Una dimostrazione della congettura di Taniyama-Shimura avrebbe significato una

dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat solo quando qualcuno fosse riuscito a provare *l'assoluta* stranezza dell'equazione ellittica di Frey.

Da principio i matematici pensarono che dimostrare la stranezza dell'equazione ellittica di Frey avrebbe richiesto un procedimento non troppo insolito. A prima vista sembrava che Frey avesse compiuto un errore elementare, e tutti coloro che erano stati a Oberwolfach ritenevano che si sarebbe scatenata una gara per stabilire chi fosse riuscito a sistemare l'algebra del problema più velocemente. Si prevedeva che nel giro di pochi giorni qualcuno spedisse un messaggio per posta elettronica con la descrizione di come aveva stabilito la reale stranezza dell'equazione ellittica di Frey.

Passò una settimana e non giunse alcun messaggio. Passarono i mesi e la corsa furiosa che era stata prevista si stava trasformando in una maratona. Sembrava che Fermat stesse provocando e tormentando i suoi successori. Frey aveva delineato una strategia seducente per dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat, ma perfino il primo elementare passo, dimostrare che l'ipotetica equazione ellittica di Frey non era modulare, stava disorientando matematici di tutto il mondo.

Per dimostrare che un'equazione ellittica non era modulare, i matematici cercavano degli invarianti simili a quelli descritti nel capitolo 4. L'invariante di un nodo mostrava che un nodo non poteva essere trasformato in un altro, e la proprietà invariante del rompicapo di Loyd mostrava che il suo gioco del quindici non poteva essere ricondotto alla sequenza corretta. Se i teorici dei numeri fossero riusciti a scoprire un invariante appropriato per descrivere l'equazione ellittica di Frey, allora avrebbero potuto dimostrare che, comunque si fosse agito su di essa, non sarebbe mai stato possibile trasformarla in una forma modulare.

Uno di coloro che si affannavano per completare la dimostrazione della connessione fra la congettura di Taniyama-Shimura e l'Ultimo Teorema di Fermat era Ken Ribet, un professore dell'Università della California a Berkeley. Sin dalla conferenza di Oberwolfach, Ribet era ossessionato dall'idea di dimostrare che l'equazione ellittica di Frey era troppo strana per essere modulare. Dopo diciotto mesi di fatiche anch'egli, come tutti gli altri, si era completamente arenato. Poi, nell'estate del 1986, un collega di Ribet, il professor Barry Mazur, venne a Berkeley per partecipare al Congresso Internazionale dei Matematici . I due amici si diedero appuntamento per un cappuccino al Café Strada e cominciarono a raccontarsi episodi sfortunati e a lamentarsi dello stato degli studi matematici.

Infine presero a discutere delle notizie più recenti sui vari tentativi di dimostrare la stranezza dell'equazione ellittica di Frey, e Ribet si mise a spiegare una possibile strategia che aveva esaminato. L'approccio sembrava vagamente promettente ma Ribet era in grado di dimostrarne solo una parte molto piccola. «Ero seduto con Barry e gli raccontavo ciò su cui stavo lavorando. Accennai al fatto che avevo dimostrato un caso molto speciale ma che non sapevo cosa fare in seguito per generalizzarlo, in modo da dare piena validità alla dimostrazione.»

Il professor Mazur sorseggiava il suo cappuccino e ascoltava l'idea di Ribet. A un certo punto si bloccò e fissò incredulo Ken. «Ma non ti rendi conto? Ci sei già riuscito! Tutto quello che devi fare è aggiungere qualche gamma-zero di struttura *(M)* e poi ti basta ripercorrere la tua argomentazione ed ecco che funziona. Hai tutto ciò che ti serve.»

Ribet guardò Mazur, guardò il suo cappuccino e tornò a guardare Mazur. Era il momento più importante della sua carriera, e Ribet ne ricorda i dettagli con affetto. «Gli dissi che aveva assolutamente ragione, naturalmente: come avevo fatto a non accorgermene? Ero davvero stupito per il fatto che non mi fosse mai venuto in mente di aggiungere il gamma-zero supplementare della struttura *(M)*, semplice come suona.»

Bisognerebbe notare che, anche se per Ken Ribet «aggiungere il gamma-zero della struttura *(M)*» suona semplice, si tratta di un passaggio logico astruso che solo un pugno di matematici in tutto il mondo sarebbe stato in grado di escogitare bevendo un cappuccino al bar.

«Era l'ingrediente essenziale che mi ero lasciato sfuggire, e ce l'avevo davanti agli occhi. Ritornai al mio appartamento veleggiando su una nuvola. Pensavo, mio Dio sarà davvero giusto? Ero completamente rapito; mi sedetti e mi misi a buttare giù note su un blocchetto di carta. Dopo un'ora o due avevo scritto ogni cosa e verificato che conoscevo i passaggi chiave e che tutto quadrava. Ricontrollai velocemente la mia argomentazione e dissi, sì, deve assolutamente funzionare. Ovviamente c'erano migliaia di matematici al Congresso Internazionale e come per caso accennai a qualcuno che avevo dimostrato che la congettura di Taniyama-Shimura implica l'Ultimo Teorema di Fermat. La notizia si sparse in un baleno: ben presto folti gruppi di persone ne vennero a conoscenza e si precipitarono verso di me per chiedermi se *fosse vero che avevo dimostrato che l'equazione ellittica di Frey non era modulare. Credo che ci riflettei per un minuto e tutto a un tratto dissi: "Sì, l'ho dimostrato"*.»

Ora l'Ultimo Teorema di Fermat era legato in modo inestricabile alla congettura di Taniyama-Shimura. Se qualcuno fosse riuscito a dimostrare che ogni equazione ellittica era modulare, ciò avrebbe implicato che l'equazione di Fermat non aveva soluzioni, e dimostrato immediatamente l'Ultimo Teorema di Fermat.

Da tre secoli e mezzo l'Ultimo Teorema di Fermat costituiva un problema a sé, un enigma curioso e impossibile ai confini della matematica. Ora Gerhard Frey e Ken Ribet l'avevano portato al centro della scena. Il problema più importante del diciassettesimo secolo era stato associato al problema più significativo del ventesimo secolo. Un rompicapo di importanza storica e di impatto emotivo enormi era stato legato a una congettura che poteva rivoluzionare la matematica moderna.

All'inizio le speranze ripresero vigore, ma poi la realtà della situazione divenne chiara. I matematici stavano tentando di dimostrare la congettura di Taniyama-Shimura da trent'anni, e avevano fallito. Perché si sarebbe dovuto fare qualche progresso proprio ora? Gli scettici pensavano che qualunque piccola speranza ci fosse di dimostrare la congettura di Taniyama-Shimura, era ormai svanita. Secondo la loro logica, tutto ciò che potrebbe condurre a una soluzione dell'Ultimo Teorema di Fermat deve essere, per definizione, impossibile.

Perfino Ken Ribet, che aveva compiuto la scoperta decisiva, era pessimista. «Facevo parte della stragrande maggioranza delle persone che pensavano che la congettura fosse assolutamente inaccessibile. Non mi detti la pena di provare a dimostrarla. Non pensai nemmeno di provarci. Probabilmente Andrew Wiles fu una delle poche persone sulla terra che ebbero l'audacia di sognare che era davvero possibile dimostrare questa congettura.»

6
IL CALCOLO SEGRETO

> Un esperto risolutore di problemi deve essere dotato di qualità incompatibili: un'immaginazione irrequieta e una pertinacia paziente.
>
> HOWARD W. EVES

«Fu una sera alla fine dell'estate del 1986, mentre stavo sorseggiando un tè freddo a casa di un amico. Durante la conversazione egli mi disse casualmente che Ken Ribet aveva dimostrato il legame fra la Taniyama-Shimura e l'Ultimo Teorema di Fermat. Ero elettrizzato. In quel momento sapevo che il corso della mia vita stava cambiando, poiché ciò significava che per dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat tutto quello che dovevo fare era dimostrare la congettura di Taniyama-Shimura. Significava che adesso il sogno della mia infanzia era una cosa degna di rispetto su cui lavorare. Sapevo che non avrei mai più potuto rinunciarvi. Sapevo che sarei andato a casa a lavorare sulla congettura di Taniyama-Shimura.»

Erano passati più di vent'anni da quando Andrew Wiles aveva trovato in biblioteca il libro che lo indusse a raccogliere la sfida di Fermat, ma ora, per la prima volta, poteva scorgere una strada per realizzare il sogno della sua infanzia. Wiles ricorda come il suo atteggiamento nei riguardi della congettura di Taniyama-Shimura cambiò all'improvviso: «Mi tornò in mente un matematico che aveva scritto qualcosa sulla congettura di Taniyama-Shimura e aveva avuto l'impudenza di proporla come esercizio al lettore interessato. Be', immagino che in quel momento fossi interessato!».

Dopo aver conseguito il dottorato con il professor John Coates a Cambridge, Wiles si era trasferito oltreoceano, all'Università di Princeton, dove ora era anch'egli un professore. Grazie alla guida di Coates, Wiles conosceva le equazioni ellittiche probabilmente meglio di chiunque altro al mondo, ma si rendeva perfettamente conto del fatto che anche con le sue enormi conoscenze di base e capacità matematiche, il compito che lo aspettava era immenso.

John Coates, come la maggior parte dei matematici, riteneva che imbarcarsi nella dimostrazione fosse un esercizio inutile: «Io stesso ero molto scettico sul fatto che la stupenda connessione fra l'Ultimo Teorema di Fermat e la congettura di Taniyama-Shimura potesse davvero portare a qualcosa, poiché devo confessare che non pensavo che la congettura di Taniyama-Shimura fosse suscettibile di dimostrazione. Per quanto questo problema fosse stupendo, dimostrarlo davvero sembrava impossibile. Devo confessare che pensavo che probabilmente non sarei vissuto abbastanza per vederlo dimostrato».

Wiles era consapevole del fatto che le probabilità erano contro di lui, ma anche se alla fine non fosse riuscito a dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat, sentiva che i suoi sforzi non sarebbero andati sprecati. «Naturalmente la congettura di Taniyama-Shimura era aperta da molti anni. Nessuno aveva avuto idea di come affrontarla, ma per lo meno si trattava di matematica corrente. Potevo tentare di dimostrare alcuni risultati, che, anche se non avessero fornito la risposta completa, avrebbero avuto comunque un valore matematico. Non avevo la sensazione di sprecare il mio tempo. Così il romanzo di Fermat che mi aveva avvinto per tutta la vita adesso si combinava a un problema che era professionalmente accettabile.»

Recluso in soffitta

Nel 1900 fu chiesto al grande logico David Hilbert perché non tentasse una dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat. «Prima di cominciare», rispose, «dovrei impegnare tre anni di studio intensivo, e non ho tutto questo tempo da sprecare per un probabile fallimento.» Wiles sapeva bene che per avere qualche speranza di trovare una dimostrazione avrebbe dovuto prima immergersi completamente nel problema, ma a differenza di Hilbert era pronto a correre il rischio. Lesse tutte le più recenti riviste specializzate e si esercitò di continuo con le ultimissime tecniche finché non divennero una sua seconda natura. La raccolta delle armi per la futura battaglia avrebbe richiesto a Wiles di passare i diciotto mesi successivi a familiarizzarsi con ogni pezzetto di matematica che fosse mai stato applicato alle equazioni ellittiche o alle forme modulari, o che fosse derivato da esse. Si trattava di un investimento relativamente poco importante, considerando che egli era pienamente convinto del fatto che qualsiasi tentativo serio di dimostrazione poteva tranquillamente richiedere dieci anni di sforzi tenaci.

Wiles abbandonò tutti i lavori che non avevano una rilevanza diretta per la dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat, e smise di partecipare al ciclo infinito di conferenze e convegni. Poiché aveva ancora delle responsabilità presso i dipartimenti di matematica a Princeton, Wiles continuò a partecipare ai seminari, a fare lezione agli studenti dell'università e a tenere esercitazioni. Ogni volta che gli fosse stato possibile avrebbe evitato le distrazioni che gli derivavano dal fatto di essere membro della facoltà lavorando a casa, dove poteva rifugiarsi nel suo studio in soffitta. Lì avrebbe cercato di espandere e estendere l'efficacia delle tecniche già affermate, con la speranza di riuscire a elaborare una sua strategia per l'attacco alla congettura di Taniyama-Shimura.

«Di solito salivo nel mio studio e mi mettevo a cercare di trovare dei modelli. Cercavo di fare calcoli che spiegassero un piccolo particolare matematico. Cercavo di armonizzarlo con una precedente interpretazione concettuale più ampia di una parte della matematica che avrebbe chiarito il problema particolare a cui stavo pensando. A volte questo richiedeva di andare a cercarlo in un libro per vedere com'era stato affrontato. A volte si trattava di modificare appena le cose, facendo qualche calcolo

in più. E a volte mi accorgevo che quello che era già stato fatto non era di alcuna utilità. Allora non mi restava che trovare qualcosa di completamente nuovo; da dove ti giunga, è un mistero.

«Sostanzialmente è solo una questione di ragionamento mentale. Spesso annoti qualcosa per chiarire i tuoi pensieri, ma non necessariamente. In particolare, quando hai raggiunto un autentico impasse, quando c'è un vero problema che vuoi superare, allora il più rigoroso ragionamento matematico standard non ti è di alcun aiuto. A condurti a questo tipo di idea nuova deve essere un lungo periodo di concentrazione tremenda sul problema senza che nulla ti distragga. Non devi assolutamente pensare ad altro; concentrarti solo sul problema. Poi ti fermi. In seguito sembra che ci sia come una sorta di periodo di rilassamento durante il quale è il subconscio che pare prendere il sopravvento, ed è allora che arriva qualche nuova intuizione.»

Dal momento in cui si imbarcò nella dimostrazione, Wiles prese la decisione sorprendente di lavorare in completo isolamento e in assoluta segretezza. Nella matematica moderna si è sviluppata una cultura della cooperazione e della collaborazione, e dunque la decisione di Wiles sembrava riportarlo a un'epoca precedente. Era come se stesse imitando l'atteggiamento dello stesso Fermat, il più famoso degli eremiti matematici. Wiles spiegò che la decisione di ingannare il resto del mondo era dovuta in parte al desiderio di lavorare senza essere distratto: «Capii che tutto ciò che ha a che fare con l'Ultimo Teorema di Fermat genera un interesse eccessivo. Non è possibile rimanere concentrati per anni a meno che non ci sia un completo raccoglimento, che troppi spettatori avrebbero distrutto».

Un'altra motivazione per il riserbo di Wiles deve essere stata il suo desiderio di gloria. Egli temeva la situazione che sarebbe sorta quando avesse completato il grosso della dimostrazione ma gli fosse mancato ancora l'elemento finale del calcolo. A quel punto, se fossero trapelate notizie dei suoi progressi, niente avrebbe potuto impedire a un matematico rivale di basarsi sul lavoro di Wiles per completare la dimostrazione e sottrargli la preda.

Negli anni a venire Wiles doveva compiere una serie di scoperte sensazionali, e nessuna sarebbe stata discussa o pubblicata finché la sua dimostrazione non fosse stata completa. Perfino i colleghi a lui più vicini ne erano all'oscuro. John Coates ricorda ancora scambi di battute con Wiles nel corso delle quali il suo ex allievo non gli rivelò alcun indizio. «Ricordo che in un certo numero di occasioni gli dissi: È tutto molto bello, questo nesso con l'Ultimo Teorema di Fermat, ma tuttora non ci sono speranze di dimostrare la Taniyama-Shimura. Credo che lui si limitasse a sorridere.»

Anche Ken Ribet, che aveva perfezionato il collegamento tra Fermat e Taniyama-Shimura, era completamente ignaro delle attività clandestine di Wiles. «Probabilmente questo è l'unico caso che conosco di qualcuno che abbia lavorato così a lungo senza svelare ciò che stava facendo, senza parlare dei progressi che stava compiendo. Non esistono precedenti nella mia esperienza. Nella nostra comunità le persone si sono sempre scambiate le proprie idee. I matematici si ritrovano ai convegni, si fanno visita a vicenda quando tengono seminari, si spediscono messaggi per posta elettronica, si parlano al telefono, cercano spunti, cercano un feedback: i matematici sono sempre in comunicazione. Quando si parla con altri colleghi si

riceve una pacca sulle spalle, la gente ti dice che ciò che hai fatto è importante, ti fornisce delle idee. È una sorta di nutrimento, e se te ne isoli allora è probabile che tu stia facendo qualcosa di psicologicamente molto strano.»

Per non destare sospetti, Wiles escogitò un trucco astuto che avrebbe messo i colleghi su una falsa pista. Nei primi anni Ottanta aveva lavorato a un'importante ricerca su un tipo particolare di equazione ellittica, ed era sul punto di pubblicarla integralmente quando le scoperte di Ribet e Frey gli fecero cambiare idea. Wiles decise di pubblicare la sua ricerca poco alla volta, dando alle stampe un nuovo articolo più o meno ogni sei mesi. Questa apparente produttività avrebbe convinto i suoi colleghi che egli stava continuando la sua solita attività di ricerca. Finché fosse riuscito a conservare questa copertura, Wiles avrebbe potuto continuare a lavorare sulla sua vera ossessione senza rivelare nulla delle sue scoperte.

L'unica persona a conoscenza del segreto di Wiles era sua moglie Nada. Andrew e Nada si sposarono poco dopo che Wiles aveva cominciato a lavorare alla dimostrazione, e mentre i calcoli progredivano egli si confidò con lei e soltanto con lei. Negli anni successivi la famiglia sarebbe stata la sua unica distrazione. «Soltanto mia moglie mi ha conosciuto nel periodo in cui ho lavorato su Fermat. Glielo dissi in luna di miele, solo pochi giorni dopo che ci eravamo sposati. Mia moglie aveva sentito parlare dell'Ultimo Teorema di Fermat, ma a quel tempo non aveva idea del significato romantico che esso assumeva per i matematici, non sapeva che per tanti anni era stata una spina nel nostro fianco.»

Duellando con l'infinito

Per dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat, Wiles doveva dimostrare la congettura di Taniyama-Shimura: ogni singola equazione ellittica può essere associata a una forma modulare. Se Wiles fosse riuscito a creare questo ponte fra i mondi ellittico e modulare, sarebbe stato possibile affrontare i problemi sorti attorno alle equazioni ellittiche utilizzando tecniche già sviluppate per risolvere problemi modulari. La dimostrazione della congettura di Taniyama-Shimura avrebbe rappresentato un'impresa poderosa non solo perché avrebbe condotto a una dimostrazione di Fermat, ma perché avrebbe annunciato una nuova era nella risoluzione di enigmi ellittici fino ad allora impenetrabili. Già prima che venisse scoperta la sua connessione con l'Ultimo Teorema di Fermat, i matematici avevano disperatamente cercato di dimostrare la congettura, ma ogni tentativo si era concluso in un fallimento. Wiles era ben conscio dell'immensa difficoltà del compito che lo attendeva: «In definitiva ciò che ingenuamente si sarebbe cercato di fare, e che certamente si cercò di fare, era di contare le equazioni ellittiche e le forme modulari, e far vedere che il loro numero era lo stesso. Ma nessuno ha mai trovato un modo semplice per farlo. Il primo problema è che di entrambe ne esiste un numero infinito e che non si può contare un numero infinito. Semplicemente non c'è un modo per farlo».

Per trovare una soluzione, Wiles adottò il metodo che usa di solito per risolvere problemi difficili. «Talvolta faccio scarabocchi e ghirigori. Non sono cose importanti, semplici ghirigori subconsci. Non uso mai il computer.» In questo caso, come accade con molti problemi della teoria dei numeri, i computer non sarebbero stati comunque di alcuna utilità. La congettura di Taniyama-Shimura si applicava a un numero infinito di equazioni, e benché un computer possa verificare un singolo caso in pochi secondi, non potrebbe mai verificare tutti i casi. Ciò di cui c'era bisogno era invece un ragionamento logico per passi successivi che fornisse effettivamente una ragione e spiegasse perché ogni equazione ellittica doveva essere modulare. Per trovare la dimostrazione Wiles faceva affidamento esclusivamente su un pezzo di carta, una matita e il suo cervello. «Ce l'avevo in testa praticamente sempre. Mi svegliavo alla mattina con questo primo pensiero. Ci pensavo per tutto il giorno e quando andavo a dormire ci stavo ancora pensando, Senza distrazioni avevo sempre la stessa cosa che continuava a girarmi nella testa.»

Dopo un anno di meditazioni Wiles decise di adottare come base per la sua dimostrazione una strategia generale nota come induzione. L'induzione è una forma di dimostrazione di enorme potenza, poiché può permettere a un matematico di dimostrare che un enunciato è vero per un numero infinito di casi dimostrando in realtà un solo caso. Ad esempio, immaginate che un matematico voglia dimostrare che un certo enunciato è vero per tutti i numeri naturali fino all'infinito. Il primo passo è dimostrare che l'enunciato è vero per il numero 1, e presumibilmente si tratta di un compito piuttosto semplice. Il passo successivo è dimostrare che se l'enunciato è vero per il numero 1 allora deve essere vero per il numero 2, e se è vero per il numero 2 allora deve essere vero per il numero 3, e se è vero per il numero 3 allora deve essere vero per il numero 4 e così di seguito. Più in generale il matematico deve dimostrare che se l'enunciato è vero per un qualsiasi numero n, allora deve essere vero per il numero successivo $n + 1$.

La dimostrazione per induzione è essenzialmente un procedimento in due fasi:

- Dimostrare che l'enunciato è vero per il primo caso.
- Dimostrare che se l'enunciato è vero per un caso qualsiasi, allora deve essere vero per il caso successivo.

Un'altra maniera di pensare alla dimostrazione per induzione è immaginare il numero infinito di casi come una fila infinita di tessere di domino. Per dimostrare ogni caso è necessario trovare un modo di abbattere ognuna delle tessere.

Abbatterle una per una richiederebbe un tempo e uno sforzo infiniti, ma la dimostrazione per induzione permette ai matematici di abbattere tutte le tessere agendo solo sulla prima. Allora, se le tessere sono sistemate con cura, la prima tessera abbatterà la seconda, che a sua volta abbatterà la terza, e cosi via all'infinito. La dimostrazione per induzione evoca «l'effetto domino». Questa forma matematica di caduta a cascata delle tessere di domino permette di dimostrare un numero infinito di casi con la sola dimostrazione del primo. Nell'appendice 9 si spiega come sia possibile usare il metodo induttivo per dimostrare un enunciato matematico relativamente semplice che è vero per tutti i numeri naturali.

Per Wiles il problema era di riuscire a costruire un ragionamento induttivo che dimostrasse che ciascuna delle infinite equazioni ellittiche poteva essere associata a ciascuna delle infinite forme modulari. Egli doveva trovare il modo di spezzare la dimostrazione in un numero infinito di casi singoli e quindi dimostrare il primo caso. Successivamente doveva dimostrare che avendo provocato la caduta della prima tessera tutte le altre sarebbero cadute. Alla fine scoprì il primo passo della sua dimostrazione induttiva nascosto nell'opera di un genio vissuto tragicamente nella Francia del diciannovesimo secolo.

Evariste Galois nacque a Bourg-la-Reine, un piccolo villaggio nei sobborghi meridionali di Parigi, il 25 ottobre 1811, ventidue anni dopo la Rivoluzione francese. Napoleone Bonaparte era al culmine del suo potere, ma l'anno successivo vide la disastrosa campagna di Russia, e nel 1814 Napoleone fu mandato in esilio, mentre re Luigi XVIII gli succedeva sul trono. Nel 1815 Napoleone fuggì dall'Elba, entrò a Parigi e reclamò il potere, ma dopo cento giorni fu sconfitto a Waterloo e costretto ad abdicare di nuovo a favore di Luigi XVIII. Galois, così come Sophie Germain, crebbe in un periodo di enormi sconvolgimenti, ma mentre la Germain si isolò dai tumulti della rivoluzione per concentrarsi sulla matematica, Galois si trovò ripetutamente al centro della lotta politica, che non solo lo distolse da una brillante carriera accademica, ma lo condusse anche a una morte prematura.

Oltre all'irrequietezza generale che pervadeva la vita di tutti, Galois aveva una passione perla politica che gli era stata ispirata dal padre, Nicholas-Gabriel Galois. Quando Evariste aveva solo quattro anni, suo padre fu eletto sindaco di Bourg-la-Reine. Ciò avvenne durante il trionfale ritorno al potere di Napoleone, in un periodo in cui i forti valori liberali di suo padre erano in armonia con lo spirito della nazione. Nicholas-Gabriel Galois era un uomo colto e di buon cuore, e nei suoi primi anni da sindaco si guadagnò il rispetto della comunità, tanto che conservò la sua carica elettiva anche quando Luigi XVIII ritornò sul trono. Al di fuori della politica, il suo interesse principale sembra fosse la composizione di rime argute che leggeva alle assemblee cittadine per la gioia dei suoi elettori. Molti anni più tardi questo talento delizioso per gli epigrammi lo avrebbe condotto alla rovina.

A dodici anni Evariste Galois cominciò a frequentare la sua prima scuola, il liceo Louis-le-Grand di Parigi, un istituto prestigioso ma autoritario. All'inizio Evariste non affrontò corsi di matematica, e il suo curriculum scolastico era discreto ma non eccezionale. Nel primo trimestre accadde tuttavia un evento che lo avrebbe segnato per il resto della vita. Un tempo il liceo era stato una scuola diretta dai gesuiti, e durante quel primo trimestre cominciò a circolare la voce che fosse sul punto di ritornare sotto l'autorità dei preti. In quel periodo repubblicani e realisti erano continuamente in lotta per spostare gli equilibri di potere fra Luigi XVIII e i rappresentanti del popolo, e l'influenza crescente dei preti era considerata come l'indizio di un allontanamento dal popolo a favore del re. Gli studenti del liceo, che per lo più avevano simpatie repubblicane, progettarono un atto di ribellione, ma il direttore della scuola, un certo Berthold, scoprí il piano ed espulse immediatamente i capi della rivolta, circa una dozzina di studenti. Il giorno seguente, quando Berthold pretese dagli altri studenti più grandi una dimostrazione di fedeltà al re, essi rifiutarono di brindare a Luigi XVIII, dopodichè ne furono espulsi altri cento. Galois,

che era troppo giovane per essere coinvolto nella fallita rivolta, rimase al liceo. Tuttavia, il fatto di aver visto i suoi compagni di studio umiliati a quel modo servì soltanto a infiammare le sue simpatie repubblicane.

Fu solo a sedici anni che Galois assistette alle sue prime lezioni di matematica, iscrivendosi a un corso che lo avrebbe trasformato agli occhi dei suoi insegnati da un allievo coscienzioso in uno studente indisciplinato. Dalle sue note scolastiche risulta che egli trascurava tutte le altre materie e si concentrava esclusivamente sulla sua nuova passione:

> Lo studente si impegna solo nelle più alte sfere della matematica. Il demone della matematica possiede questo ragazzo. Io credo che la cosa migliore per lui sarebbe che i suoi genitori gli permettessero di studiare solo quella. Qui sta perdendo il suo tempo e non fa nient'altro che tormentare i suoi insegnanti e farsi sommergere dalle punizioni.

Ben presto l'insegnante di Galois non fu più in grado di soddisfare la passione del suo allievo per la matematica, e così egli si mise a imparare direttamente dalle opere più recenti dei maestri del suo tempo. Galois assorbiva con prontezza i concetti più difficili, e a diciassette anni pubblicò sugli *Annales de Gergonne* il suo primo articolo scientifico. Per il ragazzo prodigio sembrava aprirsi una strada libera da impedimenti verso il futuro, ma doveva essere proprio la sua limpida intelligenza a costituire l'ostacolo più grande ai suoi progressi. Benché ovviamente le sue conoscenze di matematica fossero più che sufficienti per passare gli esami del liceo, le soluzioni di Galois erano spesso così innovative e raffinate che i suoi esaminatori non erano in grado di apprezzarle. A rendere le cose peggiori, Galois eseguiva moltissimi calcoli a mente, e non si preoccupava di delineare con chiarezza il suo procedimento sulla carta, lasciando gli inetti esaminatori ancora più perplessi e frustrati.

Un temperamento irritabile e un'impetuosità che non gli attiravano la simpatia degli insegnanti, o di chiunque altro incrociasse la sua strada, non contribuivano a migliorare la situazione del giovane genio. Quando Galois fece domanda di ammissione all' Ecole Polytechnique, il collegio universitario più prestigioso del paese, le sue cattive maniere e la mancanza di spiegazioni chiare nel corso dell'esame orale gli valsero il rifiuto della domanda di ammissione. Galois era ansioso di frequentare l' Ecole Polytechnique non solo per la sua eccellenza accademica, ma anche perché era un centro di attivismo repubblicano. L'anno successivo egli presentò di nuovo domanda di ammissione, e ancora una volta i suoi brillanti salti logici nel corso dell'esame orale servirono solo a confondere il suo esaminatore, un professore di nome Dinet. Intuendo che stava per fallire per la seconda volta e frustrato per il fatto che non venisse riconosciuta la sua intelligenza, Galois ebbe uno scatto di collera e gettò una cimosa contro Dinet, centrandolo in pieno. Galois non sarebbe mai più ritornato nelle venerate aule dell' Ecole Polytechnique.

Per nulla intimidito dalle bocciature, Galois conservò la fiducia nel proprio talento matematico e continuò le sue ricerche in privato. Il suo principale interesse era rivolto alla ricerca delle soluzioni di equazioni simili a quelle note come equazioni di secondo grado. Le equazioni di secondo grado hanno la forma

$ax^2 + bx + c = 0$, dove a,b e c possono assumere qualsiasi valore.

Il problema è trovare i valori di x per i quali l'equazione è vera. Invece di procedere per tentativi, i matematici preferiscono avere una formula che permetta loro di trovare le soluzioni, e fortunatamente questa formula esiste;

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

Si possono calcolare i valori corretti di x semplicemente sostituendo i valori di a,b e c nella formula soprascritta. Ad esempio, possiamo applicare la formula per risolvere la seguente equazione:

$2x^2 - 6x + 4 = 0$, in cui si è posto $a = 2$, $b = -6$ e $c = 4$.

Inserendo i valori di a,b e c nella formula, si trova che le due soluzioni dell'equazione sono $x = 1$ e $x = 2$.

Le equazioni di secondo grado fanno parte di una classe molto più vasta di equazioni chiamate polinomiali. Un tipo più complesso di polinomiale è l'equazione di terzo grado:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

La complicazione è data dal termine addizionale x^3. Aggiungendo un altro termine, x^4, otteniamo l'equazione polinomiale di grado superiore:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c = 0$$

Nel diciannovesimo secolo i matematici possedevano anche le formule per la risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado, ma non conoscevano alcun metodo per trovare le soluzioni delle equazioni di quinto grado:

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + cx + f = 0$$

In Galois nacque l'ossessione di trovare una formula per risolvere le equazioni di quinto grado, che costituiva una delle grandi sfide dell'epoca, e all'età di diciassette anni egli aveva compiuto progressi sufficienti per sottoporre due articoli di ricerca all' Accademia delle Scienze. Il relatore incaricato di giudicare gli articoli era Augustin-Louis Cauchy, che molti anni dopo avrebbe polemizzato con Lamé su una dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat rivelatasi poi errata. Cauchy fu notevolmente impressionato dal lavoro del giovane e giudicò che fosse degno di essere presentato in concorso al Gran Premio di Matematica dell'Accademia. Per poter essere ammessi alla competizione i due articoli avrebbero dovuto essere ripresentati nella forma di un unico saggio, perciò Cauchy li restituì a Galois e attese la sua iscrizione.

Dopo essere sopravvissuto alle critiche dei suoi insegnanti ed essere stato rifiutato dall' Ecole Polytechnique, il genio di Galois era sul punto di essere riconosciuto, ma nel corso dei tre anni successivi una serie di tragedie personali e professionali avrebbero distrutto le sue ambizioni. Nel luglio del 1829, a Bourg-la-Reine, dove il

padre di Galois era ancora sindaco, giunse un nuovo prete, un gesuita. Il prete disapprovava le simpatie repubblicane del sindaco e intraprese una campagna politica per spodestarlo dal suo ufficio, diffondendo voci mirate a gettare discredito sulla sua persona. In particolare, l'astuto gesuita si servì della reputazione di Nicholas-Gabriel Galois come compositore di rime argute. Scrisse una serie di poesie volgari che mettevano in ridicolo alcuni membri della comunità, e le firmò col nome del sindaco. Il vecchio Galois non riuscì a sopportare la vergogna e l'imbarazzo che ne seguirono, e decise che la sola scelta onorevole era il suicidio.

Evariste Galois, tornato per partecipare ai funerali di suo padre, vide con i propri occhi le divisioni che il prete aveva creato nel villaggio. Mentre la bara veniva calata nella fossa, esplose una zuffa fra il gesuita, che stava celebrando il servizio funebre, e i sostenitori del sindaco, che si erano resi conto del complotto perpetrato per scalzarlo. Il prete fu ferito alla testa, la zuffa si trasformò in un tumulto, e la bara fu lasciata cadere senza cerimonie nella fossa. Il giovane Galois aveva già tendenze liberali, e la vista di suo padre umiliato e distrutto dal sistema politico che dominava la società francese servì soltanto a consolidare il suo appoggio fervente alla causa repubblicana.

Tornato a Parigi, Galois stese il suo saggio molto prima che scadessero i termini di iscrizione alla competizione, e lo consegnò al segretario dell'Accademia, Joseph Fourier, che avrebbe dovuto passarlo al comitato giudicante. La dissertazione di Galois non forniva una soluzione per le equazioni di quinto grado, ma offriva una brillante intuizione, e molti matematici, compreso lo stesso Cauchy, lo ritenevano un probabile vincitore. Con grande sorpresa di Galois e dei suoi amici, non solo egli non ricevette il premio, ma non vi era stato neppure iscritto ufficialmente. Fourier era morto poche settimane prima della valutazione, e benché al comitato fosse stata trasmessa una pila di lavori ammessi alla competizione, il saggio di Galois non ne faceva parte. Il saggio non fu mai più trovato e un giornalista francese registrò quell'atto di ingiustizia.

> L'anno scorso, avanti il primo marzo, Monsieur Galois consegnò al segretario dell'Istituto una memoria sulla soluzione di equazioni numeriche. Questa memoria avrebbe dovuto entrare in competizione per il Gran Premio di Matematica. Essa meritava il premio, poiché permetteva di risolvere alcune difficoltà che Lagrange non era riuscito a superare. Monsieur Cauchy aveva conferito il più alto encomio all'autore su tale materia. E cosa accadde? La memoria è andata perduta e il premio è stato assegnato senza la partecipazione del giovane erudito.
>
> *Le Globe,* 1831

Galois pensò che il suo saggio fosse stato perso deliberatamente da un'Accademia politicamente orientata, un'idea che si rafforzò l'anno successivo, quando l'Accademia respinse un altro suo manoscritto sostenendo che «le argomentazioni non sono né sufficientemente chiare né sufficientemente elaborate per permetterci di giudicarne il rigore». Decise allora che c'era una cospirazione per escluderlo dalla comunità dei matematici e trascurò le sue ricerche per dedicarsi a combattere per la causa repubblicana. A quel tempo era uno studente dell' Ecole Normale Supérieure,

un collegio universitario di poco inferiore per prestigio all' Ecole Polytechnique. All'Ecole Normale la fama di sovversivo di Galois superò la sua reputazione di matematico. Ciò culminò in un episodio accaduto durante la rivoluzione del luglio 1830, quando Carlo decimo abbandonò la Francia e le fazioni politiche si scontrarono nelle strade di Parigi. Il direttore dell'Ecole, Guigniault, uomo di fede realista, sapendo che i suoi studenti erano in maggioranza repubblicani radicali li confinò nel dormitorio e serrò i portoni del collegio. A Galois era stato impedito di combattere al fianco dei suoi compagni, e quando alla fine i repubblicani furono sconfitti, alla frustrazione si sommò la rabbia. Non appena se ne presentò l'opportunità, egli pubblicò un feroce attacco contro il direttore del collegio, accusandolo di codardia. Come era facile prevedere, Guigniault espulse lo studente insubordinato e pose fine alla carriera matematica ufficiale di Galois.

Il 4 dicembre il genio respinto tentò di diventare un ribelle di professione arruolandosi nell'artiglieria della Guardia Nazionale, un settore della milizia di simpatie repubblicane. Prima della fine del mese il nuovo re Luigi Filippo, ansioso di evitare altre ribellioni, sciolse l'artiglieria della Guardia Nazionale. Galois si ritrovò povero e senza casa. Il giovane talento più brillante di tutta Parigi era vittima di continue persecuzioni, e alcuni dei suoi vecchi colleghi matematici cominciavano a essere sempre più preoccupati per il suo stato. Sophie Germain, che a quel tempo era la timida decana dei matematici francesi, espresse i suoi timori al conte Libri Carrucci:

> Senza dubbio tutto ciò che ha a che fare con la matematica è sfiorato dalla disgrazia. La morte di Monsieur Fourier è stato il colpo finale per Galois, questo studente che, a dispetto della sua intemperanza, mostrava i segni di un'indole intelligente. È stato espulso dall' Ecole Normale, è senza soldi, anche sua madre possiede molto poco ed egli continua nel suo atteggiamento ribelle. Dicono che diverrà completamente pazzo. Temo che sia vero.

Finché la passione di Galois per la politica continuava, era inevitabile che la sua sorte peggiorasse ulteriormente, come dimostra un episodio documentato dal grande Alexandre Dumas. Dumas si trovava al ristorante Vendanges de Bourgogne quando gli capitò di assistere a un banchetto in onore di diciannove repubblicani prosciolti da un'accusa di cospirazione:

> All'improvviso, nel mezzo di una conversazione privata che stavo tenendo con la persona seduta alla mia destra, mi giunse all'orecchio il nome di Luigi Filippo, seguito da cinque o sei fischi. Mi voltai. A quindici o venti posti da me si stava svolgendo una scena animatissima. In tutta Parigi sarebbe difficile trovare duecento persone più ostili al governo di quelle che si erano riunite alle cinque del pomeriggio nel lungo salone al piano terreno, sopra il giardino.
>
> Un giovane che aveva sollevato il bicchiere e brandiva nella stessa mano un pugnale sguainato stava cercando di farsi sentire. Evariste Galois era uno dei più ardenti repubblicani. Il baccano era tale che era diventato impossibile comprenderne la ragione stessa. Tutto ciò che riuscii a capire fu che venne formulata una minaccia e che fu fatto il nome di Luigi Filippo: il coltello sguainato rendeva chiare le intenzioni.

> Questo era troppo anche per le mie idee repubblicane. Cedetti alle pressioni del mio vicino di sinistra che, essendo uno dei commedianti del Re, temeva di essere compromesso, e saltammo dal davanzale della finestra nel giardino. Tornai a casa piuttosto preoccupato. Era chiaro che quell'episodio avrebbe avuto delle | conseguenze. Due o tre giorni dopo, infatti, Galois fu arrestato.

Dopo un mese di detenzione nel carcere di Sainte-Pélagie, Galois fu accusato di aver minacciato la vita del re e venne condotto in giudizio. Benché le sue azioni lasciassero pochi dubbi sulla sua colpevolezza, a causa della rumorosità del banchetto nessuno potè confermare di aver sentito Galois formulare minacce dirette. Una giuria benevola e la tenera età del sovversivo - Galois non aveva ancora compiuto vent'anni - portarono al suo proscioglimento. Il mese successivo fu arrestato di nuovo.

Nell'anniversario della presa della Bastiglia, il 14 luglio 1831, Galois marciò per Parigi indossando l'uniforme degli artiglieri della Guardia Nazionale, ormai fuorilegge. Benché il suo fosse soltanto un gesto di sfida, Galois fu condannato a sei mesi di carcere, da scontare a Sainte-Pélagie, durante i quali, lui che era astemio, fu indotto a bere dai furfanti che gli stavano intorno.

Una settimana dopo, dalla garitta di fronte al carcere un cecchino sparò un colpo nella cella in cui si trovava Galois, ferendo l'uomo che gli stava accanto. Galois era convinto che il proiettile fosse destinato a lui, e che ci fosse un complotto del governo per assassinarlo. L'idea della persecuzione politica lo terrorizzava; inoltre la lontananza dagli amici e dalla famiglia e il rifiuto delle sue idee matematiche lo fecero precipitare in uno stato di depressione. Nel delirio di un'ubriacatura tentò di pugnalarsi a morte, ma i suoi compagni di prigionia riuscirono a trattenerlo e a disarmarlo.

Nel marzo del 1832, un mese prima che Galois finisse di scontare il periodo di pena, a Parigi esplose un'epidemia di colera e i prigionieri di Sainte-Pélagie furono rilasciati. Ciò che accadde a Galois nelle settimane successive è stato oggetto di infinite congetture, ma quello che è certo è che gli eventi di quel periodo furono la conseguenza di una storia d'amore con una donna misteriosa di nome Stéphanie-Félicie Poterin du Motel, la figlia di un rispettato medico parigino. Non ci sono indizi sul modo in cui iniziò la relazione, ma i dettagli della sua tragica conclusione sono ben documentati.

Stéphanie era già fidanzata con un gentiluomo di nome Pescheux d'Herbinville, il quale scoprì l'infedeltà della sua amata. D'Herbinville era furioso e, essendo una delle migliori pistole di Francia, non esitò a sfidare immediatamente Galois a un duello all'alba. Galois conosceva bene la reputazione del suo rivale. La sera precedente al duello, pensando che fosse l'ultima opportunità di affidare i suoi pensieri alla penna, scrisse alcune lettere ai suoi amici per spiegare le circostanze in cui si era venuto a trovare:

> Prego i miei compatrioti, i miei amici, di non rimproverarmi se non muoio per il mio paese. Muoio vittima di un'infame civetta e di due uomini che sono il suo zimbello. È per una miserabile calunnia che pongo fine alla mia vita. Oh! Perché morire per qualcosa di così piccolo, di così spregevole? Chiamo il cielo a testimone che soltanto

per costrizione e per forza ho risposto a una provocazione che ho tentato con tutti i mezzi di evitare.

Nonostante la sua devozione alla causa repubblicana e la storia d'amore in cui era coinvolto, Galois aveva sempre conservato la passione per la matematica, e una delle sue più grandi paure era che la sua ricerca, che era già stata rifiutata dall' Accademia, andasse persa per sempre. Nel disperato tentativo di ottenerne il riconoscimento, passò tutta la notte a scrivere teoremi che, pensava, avrebbero chiarito completamente l'enigma delle equazioni di quinto grado. Le pagine che vergò erano in gran parte una trascrizione delle idee che aveva sottoposto a Cauchy e Fourier, ma nascosti fra i complessi passaggi algebrici c'erano riferimenti occasionali a Stéphanie ed esclamazioni di disperazione: «Mi manca il tempo! Mi manca il tempo!». Al termine della notte, quando aveva completato i calcoli, Galois scrisse una lettera di accompagnamento indirizzata al suo amico Auguste Chevalier, con la richiesta che, se fosse morto in duello, le carte venissero distribuite ai più grandi matematici d'Europa:

Mio caro amico,

Ho fatto alcune nuove scoperte in analisi. La prima concerne la teoria delle equazioni di quinto grado, e le altre le funzioni integrali.

Nella teoria delle equazioni ho ricercato le condizioni per la risolubilità di equazioni per radicali; ciò mi ha dato l'occasione di approfondire questa teoria e di descrivere tutte le trasformazioni possibili su di un'equazione, anche se non è risolubile per radici. Troverai tutto qui in tre memorie…

Nella mia vita ho spesso avuto l'ardire di avanzare proposizioni di cui non ero sicuro. Ma quello che qui ho scritto l'ho chiaro nella testa da più di un anno, e non sarebbe nel mio interesse lasciarmi esposto al sospetto di annunciare teoremi di cui non possiedo una dimostrazione completa.

Richiedi pubblicamente a Jacobi o a Gauss di esprimere le loro opinioni non sulla verità ma sull'importanza di questi teoremi. Dopo di che, spero che qualcuno troverà utile mettere ordine in questi miei geroglifici.

Ti abbraccio con affetto

E. Galois

La mattina seguente, mercoledì 30 maggio 1832, Galois e d'Herbinville si affrontarono a venticinque passi di distanza in un campo isolato, armati di pistola. D'Herbinville era accompagnato dai suoi secondi, Galois era solo. Non aveva confidato a nessuno la sua vicenda; un messaggero che aveva mandato a suo fratello Alfred non avrebbe comunicato la notizia del duello fino a che non si fosse concluso, e le lettere che aveva scritto nella notte precedente non sarebbero giunte al suo amico che dopo molti giorni.

Le pistole furono sollevate e i colpi partirono. D'Herbinville rimase in piedi, Galois fu colpito allo stomaco. Giaceva per terra senza più speranze. Non c'erano medici e il vincitore si allontanò con calma lasciando il suo avversario ferito a morire. Alcune ore più tardi Alfred arrivò sulla scena dello scontro e trasportò suo fratello

all'ospedale Cochin. Ma ormai era troppo tardi: era sopravvenuta una peritonite e il giorno seguente Galois morì.

Il suo funerale fu farsesco quasi quanto quello di suo padre. La polizia pensava che sarebbe stato l'epicentro di un raduno politico, e nella notte precedente arrestò trenta attivisti. Ma per la cerimonia si riunirono comunque duemila repubblicani, e fra gli amici di Galois e gli ufficiali governativi venuti a controllare gli eventi scoppiarono dei tafferugli.

La rabbia di coloro che seguivano il funerale era dovuta alla convinzione crescente che d'Herbinville non fosse un fidanzato tradito ma un agente del governo, e che Stéphanie non fosse una donna innamorata ma una seduttrice assoldata per il complotto. Episodi come quello del colpo sparato contro Galois quando si trovava nelle prigioni di Sainte-Pélagie già facevano sospettare l'esistenza di una cospirazione per eliminare il giovane agitatore, e cosí i suoi amici giunsero alla conclusione che egli era stato coinvolto con l'inganno in una storia d'amore che faceva parte di una macchinazione politica per ucciderlo. Alcuni storici hanno sostenuto che il duello fu la conseguenza di una tragica storia d'amore, altri che ebbe motivazioni politiche, ma qualunque sia stata la verità, uno dei più grandi matematici del mondo fu ucciso all'età di vent'anni, dopo essersi dedicato alla matematica per cinque anni soltanto.

Prima di rendere pubbliche le carte di Galois, suo fratello e Auguste Chevalier le riscrissero in forma ordinata per dare chiarezza agli argomenti e ampliarne le spiegazioni. La fretta e l'inadeguatezza abituali con cui Galois esponeva le sue idee furono senza dubbio esacerbate dal fatto di aver avuto una sola notte per riassumere in poche pagine anni di ricerche. Benché i due avessero mandato come dovuto copie del manoscritto a Gauss , Jacobi e altri, l'opera di Galois non ottenne alcun riconoscimento per oltre un decennio, finchè nel 1846 una copia non giunse nelle mani di Joseph Liouville. Nei calcoli Liouville riconobbe l'impronta del genio, e passò mesi a cercare di interpretarne il significato. Infine redasse il saggio e lo pubblicò sul suo prestigioso Journal de Mathématiques pures et appliquées. La reazione degli altri matematici fu immediata e notevole, perché Galois aveva realmente formulato una spiegazione completa di come si poteva procedere per trovare le soluzioni delle equazioni di quinto grado. In primo luogo Galois aveva classificato tutte le equazioni di quinto grado in due tipi: quelle che erano risolubili e quelle che non lo erano. Quindi aveva ideato una formula appropriata per trovare le soluzioni delle equazioni risolubili. Inoltre Galois aveva studiato le equazioni polinomiali di grado superiore al quinto, cioè quelle che contenevano i termini x6, x7 e così via, e aveva scoperto un metodo per stabilire quali fossero risolubili. Fu uno dei capolavori della matematica del diciannovesimo secolo, creato da uno dei suoi eroi più tragici.

Nella sua introduzione al saggio, Liouville rifletteva sui motivi per cui il giovane matematico era stato respinto dai suoi colleghi più anziani e su come i suoi sforzi avevano resuscitato Galois:

> Un desiderio esagerato di concisione fu causa di questo difetto che più di ogni altra cosa bisognerebbe sforzarsi di evitare quando si trattano le questioni astratte e

misteriose dell'Algebra pura. La chiarezza è, senza alcun dubbio, ancor più necessaria quando si tenta di condurre il lettore lontano dalle strade battute e in territori inesplorati. Come disse Descartes, «quando sono in discussione questioni trascendentali, siate chiari in modo trascendentale». Troppo spesso Galois trascurò questo precetto; e possiamo comprendere come matematici illustri abbiano ritenuto opportuno cercare, con la severità dei loro saggi consigli, di ricondurre un principiante, pieno di genialità ma privo di esperienza, sulla retta via. L'autore che censurarono si presentò al loro cospetto pieno di ardore e di vivacità; avrebbe dovuto trarre profitto dai loro consigli.

Ma ora tutto è cambiato. Galois non è più! Non indulgiamo a critiche inutili; lasciamo da parte i difetti e guardiamo ai meriti...

Il mio zelo è stato ben ricompensato, e ho provato un piacere intenso nel momento in cui, dopo aver colmato qualche piccola lacuna, mi sono reso conto della totale correttezza del metodo con il quale Galois dimostra, in particolare, questo magnifico teorema.

La caduta della prima tessera di domino

Al centro dei calcoli di Galois c'era un concetto su cui si basa la teoria oggi nota come teoria dei gruppi. Egli aveva trasformato quell'idea in un potente strumento per risolvere problemi in precedenza insolubili. In matematica un gruppo è un insieme di elementi tali che ciascun elemento può essere combinato a un altro per mezzo di una data operazione, come l'addizione o la moltiplicazione, e che soddisfa certe proprietà. Una delle proprietà fondamentali che definiscono un gruppo è la seguente: quando due elementi qualsiasi del gruppo sono combinati tramite l'operazione, il risultato è un altro elemento del gruppo. Si dice allora che il gruppo è chiuso rispetto a quella operazione.

I numeri interi, ad esempio, formano un gruppo rispetto all'operazione di «addizione». Combinando un numero intero con un altro tramite l'operazione di addizione, si ottiene un terzo numero intero. Così,

$$4+12=16$$

Tutti i risultati possibili dell'addizione di numeri interi appartengono all'insieme dei numeri interi, e perciò i matematici affermano che «i numeri interi sono chiusi rispetto all'addizione» o che «i numeri interi costituiscono un gruppo rispetto all'addizione». D'altra parte i numeri interi non costituiscono un gruppo rispetto all'operazione «divisione», poiché la divisione di un numero intero per un altro intero non dà necessariamente come risultato un numero intero. Ad esempio,

$$4\div12=\frac{1}{3}$$

La frazione $\frac{1}{3}$ non è un numero intero, e non appartiene al gruppo di partenza, ma se consideriamo un gruppo più ampio che comprenda le frazioni, ossia il gruppo dei numeri razionali, possiamo ristabilire la chiusura: «I numeri razionali sono chiusi rispetto alla divisione». Detto questo, però, bisogna fare ancora attenzione, perché la divisione di un elemento per zero porta a un risultato infinito, e ciò conduce a varie conseguenze matematiche spaventose. Per questo motivo è più esatto affermare che «i numeri razionali (escluso lo zero) sono chiusi rispetto alla divisione».

I numeri interi e le frazioni formano gruppi di grandezza infinita. Si potrebbe dunque pensare che quanto più il gruppo è grande, tanto più è interessante la matematica che esso genera. Galois aveva però una filosofia del «piccolo è meglio», e mostrò che piccoli gruppi costruiti con cura potevano esibire una loro specifica ricchezza. Invece di utilizzare i gruppi numerici infiniti, Galois parti da un'equazione particolare e costruì un gruppo dalle poche soluzioni di quell'equazione. Furono i gruppi formati con le soluzioni di equazioni di quinto grado che gli permisero di ottenere i suoi risultati su tali equazioni. Un secolo e mezzo dopo, Wiles avrebbe usato il lavoro di Galois come base per la sua dimostrazione della congettura di Taniyama-Shimura.

Per dimostrare la congettura di Taniyama-Shimura, i matematici dovevano mostrare che ciascuna delle infinite equazioni ellittiche poteva essere accoppiata a una forma modulare. All'inizio si era cercato di dimostrare che l'intero Dna di un'equazione ellittica (la sua *E*-serie) poteva essere ricondotto all'intero Dna di una forma modulare (la sua *M*-serie). Fatto questo, si sarebbe passati alla successiva equazione ellittica. Benché un tale approccio sia assolutamente ragionevole, nessuno aveva trovato un modo per applicare questo procedimento al numero infinito di equazioni ellittiche e di forme modulari.

Wiles affrontò il problema in modo radicalmente diverso. Invece di cercare di accoppiare tutti gli elementi di una *E*-serie e di una *M*-serie per poi passare alla *E*-serie e alla *M*-serie successive, egli tentò di accoppiare un elemento di tutte le *E*-serie e di tutte le *M*-serie per poi passare all'elemento successivo. In altre parole, ogni *E*-serie è un elenco infinito di elementi, singoli geni che compongono il Dna, e Wiles voleva dimostrare che era possibile accoppiare il primo gene di ogni *E*-serie con il primo gene di ogni *M*-serie. Egli sarebbe quindi passato a dimostrare che il secondo gene di ogni *E*-serie poteva essere accoppiato al secondo gene di ogni *M*-serie, e così via.

Nell'approccio tradizionale si aveva a che fare con un problema infinito: anche se si fosse riusciti a dimostrare che tutta una *E*-serie corrispondeva a tutta una *M*-serie, restavano ancora da accoppiare un'infinità di *E*-serie e di *M*-serie. Anche l'approccio adottato da Wiles richiedeva di dover affrontare l'infinito, poiché anche se egli poteva dimostrare che il primo gene di ogni *E*-serie era riconducibile al primo gene di ogni *M*-serie, rimanevano ancora infiniti geni da accoppiare. Tuttavia l'approccio di Wiles aveva un vantaggio importante rispetto a quello tradizionale.

Nel vecchio metodo, una volta dimostrato che un'intera *E*-serie corrispondeva a un'intera *M*-serie, bisogna poi chiedersi quali siano la *E*-serie e la *M*-serie che si dovrebbe cercare di accoppiare. L'infinità delle *E*-serie e delle *M*-serie non è dotata

di alcun ordine intrinseco, e dunque la scelta della successiva coppia che bisogna cercare di accoppiare è in gran parte arbitraria. Nel metodo di Wiles i geni delle E-serie sono invece dotati di un ordine intrinseco, e quindi dopo aver dimostrato che tutti i primi geni si accoppiano $(E_1 = M_1)$, il passo successivo è ovviamente quello di dimostrare che tutti i secondi geni si accoppiano $(E_2 = M_2)$, e così via.

Questo ordine intrinseco era esattamente ciò di cui Wiles aveva bisogno per poter elaborare una dimostrazione per induzione. All'inizio Wiles avrebbe dovuto dimostrare che era possibile accoppiare il primo elemento di ogni *E*-serie con il primo elemento di ogni *M*-serie. Quindi avrebbe dovuto dimostrare che se era possibile accoppiare i primi elementi allora era possibile accoppiare i secondi elementi, e se era possibile accoppiare i secondi elementi allora lo stesso si sarebbe potuto fare per i terzi elementi, e così di seguito. Wiles doveva far cadere la prima tessera di domino, e quindi doveva dimostrare che una qualsiasi tessera, cadendo, avrebbe fatto cadere la tessera successiva.

Il primo passo fu completato quando Wiles comprese quale fosse la portata dei gruppi di Galois. Un pugno di soluzioni di una qualsiasi equazione ellittica poteva essere utilizzato per costruire un gruppo. Dopo mesi di analisi Wiles dimostrò che quel gruppo conduceva a una conclusione irrefutabile: il primo elemento di ogni *E*-serie poteva effettivamente essere accoppiato al primo di una *M*-serie. Grazie a Galois, Wiles era stato in grado di far cadere la prima tessera di domino. Il passo successivo della sua dimostrazione per induzione esigeva che egli trovasse un modo di mostrare che se un qualsiasi singolo elemento delle *E*-serie si accoppiava al corrispondente elemento delle *M*-serie, allora la stessa cosa doveva valere anche per la coppia successiva.

Per arrivare a questo punto erano già occorsi due anni, e non c'erano indizi sul tempo che sarebbe stato necessario per trovare un modo di estendere la dimostrazione. Wiles era ben conscio del compito che lo aspettava: «Ci si potrebbe chiedere come potessi dedicare un tempo illimitato a un problema che forse non era semplicemente possibile risolvere. La risposta è che amavo davvero lavorare su questo problema, e ne ero ossessionato. Mi piaceva mettere alla prova le mie capacità mentali affrontandolo. Inoltre sapevo che la matematica su cui stavo riflettendo, anche se non avesse avuto la validità sufficiente per dimostrare Taniyama-Shimura, e quindi Fermat, avrebbe comunque dimostrato qualcosa. Non stavo inoltrandomi in un vicolo secondario; si trattava sicuramente di buona matematica, e questo fu vero fin dall'inizio. Certo, c'era la possibilità che non sarei mai arrivato a Fermat, ma senza alcun dubbio non stavo semplice mente sprecando il mio tempo».

«Risolto il Teorema di Fermat?»

Benché fosse soltanto il primo passo verso la dimostrazione della congettura di Taniyama-Shimura, la strategia di Wiles basata sui gruppi di Galois costituiva una brillante scoperta matematica, degna in sé di essere pubblicata. A causa

dell'isolamento che si era imposto, Wiles non poteva annunciare il risultato al resto del mondo, ma per lo stesso motivo non aveva idea di chi altro stesse eventualmente compiendo progressi altrettanto significativi.

Wiles ricorda il suo atteggiamento filosofico nei riguardi dei potenziali rivali: «Be', ovviamente nessuno desidera passare anni a cercare di risolvere qualcosa per poi scoprire che qualcun altro l'ha risolta qualche settimana prima di te. Ma poiché stavo cercando di risolvere un problema ritenuto impossibile, in realtà non temevo molto la concorrenza, per quanto strano possa sembrare. Semplicemente non pensavo che né io né nessun altro avessimo un'idea vera e propria di come farlo».

L'8 marzo 1988 Wiles rimase di sasso leggendo sulle prime pagine dei giornali che l'Ultimo Teorema di Fermat era stato risolto. Il Washington Post e il *New York Times* affermavano che il trentottenne Yoichi Miyaoka dell'Università Metropolitana di Tokyo aveva scoperto una soluzione del problema più difficile del mondo. Al momento Miyaoka non aveva ancora pubblicato la sua dimostrazione, ma ne aveva solo tratteggiato le linee nel corso di un seminario tenuto presso l'Istituto Max Planck di Matematica a Bonn. Don Zagier, che assistette al seminario, riassunse l'atteggiamento di moderato ottimismo della comunità dei matematici: «La dimostrazione di Miyaoka è davvero molto interessante, e secondo alcune persone ci sono ottime probabilità che funzioni. Non è ancora definitiva, ma fino a questo punto sembra ottima».

A Bonn Miyaoka aveva descritto come si fosse accostato al problema da un punto di vista del tutto nuovo, quello della geometria differenziale. Per decenni i geometri differenziali avevano elaborato una ricca interpretazione delle figure matematiche, e in particolare delle proprietà delle loro superfici. Poi, negli anni Settanta, un'equipe di russi guidata dal professor S. Arakelov cercò di tracciare paralleli fra problemi della geometria differenziale e della teoria dei numeri. Si trattava di una parte del programma Langlands, e la speranza era di riuscire a risolvere i problemi della teoria dei numeri rimasti senza risposta studiando le questioni corrispondenti della geometria differenziale a cui si era già data una risposta. Questa strategia era nota come filosofia del parallelismo.

Gli studiosi di geometria differenziale che tentavano di affrontare problemi della teoria dei numeri divennero noti col nome di «geometri aritmetico-algebrici». Essi rivendicarono la loro prima vittoria significativa nel 1983, quando Gerd Faltings dell' Institute for Advanced Studies di Princeton diede un contributo importante alla comprensione dell'Ultimo Teorema di Fermat. Ricordate che Fermat affermava che non esistono soluzioni dell'equazione:

$$x^n + y^n = z^n \text{ per } n \text{ maggiore di } 2.$$

Faltings riteneva di poter compiere qualche progresso verso la dimostrazione dell'Ultimo Teorema studiando le forme geometriche associate a ciascuna delle equazioni. Le forme corrispondenti a ogni equazione sono tutte diverse fra loro, ma hanno comunque una cosa in comune: presentano tutte dei buchi. Le forme sono a quattro dimensioni, piuttosto simili a forme modulari, e due di queste, in una rappresentazione a due dimensioni, vengono mostrate nella figura 6.1.

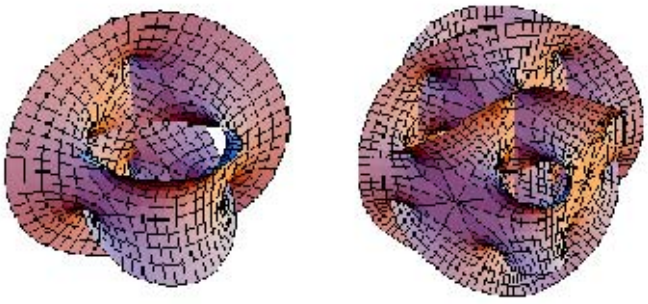


Figura 6.1: Queste superfici sono state create con il programma Mathematica. Esse sono rappresentazioni geometriche dell'equazione $x^n + y^n = 1$, dove $n = 3$ per la prima immagine e $n = 5$ per la seconda immagine. Qui, x e y sono considerate come variabili complesse.

Tutte queste forme geometriche sono simili a ciambelle, tranne che per il fatto di avere molti buchi invece di uno solo. Maggiore è il valore di n nell'equazione, più buchi ci sono nella forma geometrica corrispondente.

Faltings riuscì a dimostrare che, siccome queste figure hanno sempre più di un buco, nella teoria dei numeri ciò implica che le equazioni di Fermat a esse associate possono avere solo un numero finito di soluzioni in numeri interi. Un numero finito di soluzioni può essere un numero qualsiasi, da zero, cioè quello che sosteneva Fermat, fino a un milione o a un miliardo. Dunque Faltings, pur non avendo dimostrato l'Ultimo Teorema di Fermat, era almeno riuscito a escludere la possibilità che esistessero infinite soluzioni.

Cinque anni più tardi Miyaoka affermò di essere in grado di compiere un altro passo. Non ancora trentenne, egli aveva formulato una congettura concernente una certa disuguaglianza, che sarebbe divenuta nota come disuguaglianza di Miyaoka. Divenne chiaro che la dimostrazione della sua congettura geometrica avrebbe dimostrato anche che il numero delle soluzioni delle equazioni di Fermat non solo era finito, ma era uguale a zero. L'approccio di Miyaoka era analogo a quello di Wiles, nel senso che entrambi stavano cercando di dimostrare l'Ultimo Teorema collegandolo a una congettura fondamentale in un altro campo della matematica. Nel caso di Miyaoka il campo era quello della geometria differenziale, mentre per Wiles la dimostrazione passava attraverso le equazioni ellittiche e le forme modulari. Per sua sfortuna Wiles stava ancora sforzandosi di dimostrare la congettura di Taniyama-Shimura quando il matematico giapponese diede l'annuncio di una dimostrazione completa relativa alla sua congettura, e dunque di una dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat.

Due settimane dopo l'annuncio fatto a Bonn, Miyaoka rese pubbliche le cinque pagine di calcoli algebrici che costituivano i dettagli della sua dimostrazione, e le verifiche cominciarono. Teorici dei numeri e geometri differenziali di tutto il mondo esaminarono la dimostrazione riga per riga alla ricerca della più piccola lacuna logica o della minima traccia di un falso assunto. Nel giro di pochi giorni parecchi matematici misero in rilievo ciò che sembrava essere una preoccupante

contraddizione all'interno della dimostrazione. Una parte del lavoro di Miyaoka conduceva a una particolare conclusione nella teoria dei numeri, e quando essa veniva riportata di nuovo nell'ambito della geometria differenziale, entrava in conflitto con un risultato che era già stato : dimostrato anni prima. Anche se non invalidava necessariamente l'intera dimostrazione di Miyaoka, questo fatto si scontrava con la filosofia del parallelismo fra la teoria dei numeri e la geometria differenziale.

Passarono altre due settimane prima che Gerd Faltings, proprio colui che aveva preparato il terreno a Miyaoka, annunciasse di aver individuato l'esatto motivo dell'apparente crollo del parallelismo: una lacuna logica. Il matematico giapponese era prevalentemente un esperto di geometria, e non era stato del tutto rigoroso nel trasportare le sue idee nel territorio a lui meno familiare della teoria dei numeri. Un esercito di teorici dei numeri tentò di aiutare Miyaoka a rimediare al suo errore, ma ogni sforzo fu vano. A due mesi dal primo annuncio l'opinione generale era che la dimostrazione fosse destinata a fallire.

Come era accaduto nel caso di molte altre dimostrazioni fallite del passato, Miyaoka aveva prodotto della matematica nuova e interessante. Singole parti della dimostrazione avevano una loro propria validità come applicazioni ingegnose della geometria differenziale alla teoria dei numeri, e in anni successivi altri matematici si sarebbero basati su di esse per dimostrare altri teoremi, ma mai l'Ultimo Teorema di Fermat.

Ben presto il chiasso intorno a Fermat si spense e i giornali pubblicarono brevi aggiornamenti spiegando che il rompicapo vecchio di trecento anni rimaneva insoluto. Nella metropolitana di New York, sui muri della stazione dell'Ottava Strada, comparve un nuovo graffito, ispirato senza dubbio da tutta l'attenzione dei media per il teorema:

$$x^n + y^n = z^n\text{: nessuna soluzione.}$$

Ho scoperto una dimostrazione meravigliosa di questo fatto, ma adesso non posso scriverla perché sta arrivando il mio treno.

Il palazzo immerso nell'oscurità

Ignorato da tutti, Wiles trasse un sospiro di sollievo. L'Ultimo Teorema di Fermat rimaneva inviolato ed egli poteva proseguire la sua battaglia per dimostrarlo attraverso la congettura di Taniyama-Shimura. «Passavo la maggior parte del tempo seduto alla mia scrivania a scrivere, ma talvolta riuscivo a ridurre il problema a qualcosa di molto specifico: un filo conduttore, qualcosa che mi colpiva per la sua stranezza, qualcosa che stava giusto sotto il foglio, che non riuscivo a individuare con precisione. Se c'era una cosa che mi ronzava nella testa, non avevo alcun bisogno di uno strumento con cui scrivere o di una scrivania a cui lavorare; andavo invece a fare

una passeggiata giù al lago. Trovo che mentre cammino riesco a fissare la mente su un aspetto molto specifico di un problema, concentrandomi completamente su di esso. Avevo sempre con me una matita e un foglio a portata di mano, di modo che se avessi avuto un'idea avrei potuto sedermi su una panchina e mettermi a buttare giù qualche appunto.»

Dopo tre anni di sforzi ininterrotti Wiles aveva compiuto una serie di decisi passi avanti. Aveva applicato i gruppi di Galois alle equazioni ellittiche, aveva spezzato le equazioni ellittiche in un numero infinito di pezzi, e quindi aveva dimostrato che il primo pezzo di ogni equazione ellittica doveva essere modulare. Aveva fatto cadere la prima tessera di domino, e ora stava esaminando delle tecniche che avrebbero potuto portare al crollo di tutte le altre. Col senno di poi, questo appare come un percorso naturale verso una dimostrazione, ma arrivare a quel punto aveva richiesto una determinazione enorme per superare i periodi in cui la fiducia veniva meno. Wiles descrive la sua esperienza di ricerca matematica come un viaggio attraverso un buio palazzo inesplorato. «Entri nella prima stanza del palazzo ed è buia.; Completamente buia. Avanzi a tentoni urtando nei mobili, ma a poco a poco riesci a individuare la posizione di ciascun mobile. Infine, dopo sei mesi o più, trovi l'interruttore della luce, lo giri, e di colpo è tutto illuminato. Puoi vedere esattamente dov'eri. Poi ti sposti nella stanza successiva e passi altri sei mesi nell'oscurità. Così ognuna di queste scoperte, seppure a volte giungano immediate e altre volte richiedano un periodo di un giorno o due, sono il culmine di, e non potrebbero esistere senza, molti mesi passati a vagare nell'oscurità che le precede.»

Nel 1990 Wiles si ritrovò in quella che sembrava la stanza più buia di tutte. La stava esplorando da quasi due anni. Non possedeva ancora un modo per dimostrare che se un pezzo dell' equazione ellittica era modulare allora lo stesso doveva essere vero per il pezzo successivo. Aveva scoperto, avendoli provati tutti, che ogni strumento e ogni tecnica disponibili nella letteratura pubblicata sull'argomento erano inadeguati. «Pensavo proprio di essere sulla pista giusta, ma questo non significava necessariamente che avrei raggiunto la mia meta. Poteva darsi che i metodi che occorrevano per risolvere questo particolare problema fossero semplicemente al di fuori della portata della matematica attuale. Forse i metodi di cui avevo bisogno per completare la dimostrazione non sarebbero stati inventati che fra cent'anni. Così, anche se ero sulla pista giusta, c'era la possibilità che vivessi nel secolo sbagliato.»

Per nulla intimidito, Wiles perseverò per un altro anno. Iniziò a lavorare su una tecnica chiamata teoria di Iwasawa. La teoria di Iwasawa era un metodo per analizzare le equazioni ellittiche che Wiles aveva imparato quando era studente di John Coates a Cambridge. Benché il metodo cosi com'era fosse inadeguato, Wiles sperava di riuscire a modificarlo e a renderlo abbastanza efficace da provocare un effetto domino.

Dopo aver compiuto la scoperta iniziale con i gruppi di Galois, la sua frustrazione aveva continuato a crescere. Ogni volta che la pressione diventava eccessiva Wiles si rivolgeva alla sua famiglia. Da quando aveva cominciato a lavorare sull'Ultimo Teorema di Fermat, nel 1986, era già diventato padre due volte. «Il solo modo in cui riuscivo a rilassarmi era stando con i miei figli. I bambini piccoli non hanno alcun

interesse per Fermat, vogliono soltanto ascoltare una storia e non intendono lasciarti fare nient'altro.»

Il metodo di Kolyvagin e Flach

Nell'estate del 1991 Wiles aveva la sensazione di aver perso la sua battaglia per adattare la teoria di Iwasawa. Egli doveva avere la certezza di poter dimostrare che ogni tessera di domino avrebbe fatto cadere la tessera successiva se essa stessa fosse stata fatta cadere, ovvero che se un elemento nella *E*-serie dell'equazione ellittica coincideva con un elemento nella *M*-serie della forma modulare, allora la stessa cosa sarebbe successa per l'elemento successivo. Doveva anche essere sicuro che ciò fosse vero per qualsiasi equazione ellittica. La teoria di Iwasawa non poteva offrirgli le garanzie necessarie. Wiles portò a termine un'altra ricerca esaustiva nella letteratura dedicata all'argomento, ma ancora una volta non riuscì a trovare una tecnica alternativa che gli fornisse i mezzi di cui aveva bisogno per superare l'ostacolo. Essendo rimasto praticamente recluso a Princeton nel corso degli ultimi cinque anni, Wiles decise di ritornare in circolazione per informarsi sui più recenti pettegolezzi matematici. Forse da qualche parte c'era qualcuno che stava lavorando su una nuova tecnica innovativa, e che fino ad allora, per qualche ragione, non aveva pubblicato i propri risultati. Si diresse a nord, a Boston, per partecipare a un importante convegno sulle equazioni ellittiche, dove era sicuro di incontrare i protagonisti più importanti in quella materia.

Wiles fu accolto cordialmente da colleghi di tutto il mondo, felicissimi di rivederlo dopo un'assenza così lunga dal circuito dei convegni. Ancora non sapevano ciò su cui stava lavorando, e Wiles fu attento a non rivelare alcun indizio. I colleghi non sospettarono secondi fini quando Wiles chiese loro le notizie più recenti sulle equazioni ellittiche. Da principio le risposte non furono di alcuna rilevanza per la situazione di Wiles, ma un incontro con John Coates, il suo ex supervisore, fu più fruttuoso: « Coates mi parlò di un suo studente di nome Matheus Flach che stava scrivendo un bel saggio in cui analizzava le equazioni ellittiche. Flach si basava su un metodo ideato di recente da Kolyvagin, e pareva che il suo metodo fosse tagliato su misura per il mio problema. Sembrava esattamente ciò di cui avevo bisogno, anche se sapevo che avrei dovuto sviluppare ulteriormente questo metodo, che è noto col nome di Kolyvagin-Flach. Misi completamente da parte il vecchio approccio che stavo provando e mi dedicai notte e giorno a estendere il metodo di Kolyvagin-Flach».

In teoria questo nuovo metodo avrebbe permesso di estendere l'argomentazione di Wiles dal primo pezzo dell'equazione ellittica a tutti gli altri pezzi, e potenzialmente avrebbe potuto essere valido per ogni equazione ellittica. Il professor Kolyvagin aveva ideato un metodo matematico di enorme efficacia, e Flach lo aveva perfezionato fino a renderlo ancora più potente. Né l'uno né l'altro si resero conto che Wiles intendeva incorporare il loro lavoro nella dimostrazione più importante al mondo.

Wiles ritornò a Princeton, passò parecchi mesi a familiarizzarsi con la tecnica che aveva appena scoperto, e quindi si dedicò al compito mastodontico di adattarla e perfezionarla. Presto fu in grado di applicare la dimostrazione per induzione a un'equazione ellittica particolare: poteva far cadere tutte le tessere di domino. Purtroppo il metodo di Kolyvagin-Flach che funzionava per una particolare equazione ellittica non necessariamente funzionava per un'altra. Alla fine Wiles si rese conto che era possibile classificare tutte le equazioni ellittiche in varie famiglie. Una volta modificato in modo che funzionasse per un'equazione ellittica, il metodo di Kolyvagin-Flach avrebbe funzionato per tutte le equazioni ellittiche di quella famiglia. Il problema era di adattare il metodo di Kolyvagin-Flach in modo che funzionasse per qualsiasi famiglia. Benché alcune famiglie fossero più difficili da conquistare di altre, Wiles aveva fiducia di riuscire ad aprirsi la strada attraverso di esse una per una.

Dopo sei anni di intense fatiche Wiles pensava di essere in vista del traguardo. Faceva progressi di settimana in settimana, dimostrando che famiglie sempre nuove e sempre più grandi di equazioni ellittiche dovevano essere modulari. Sembrava che sbarazzarsi delle equazioni ellittiche ancora insolute fosse ormai solo una questione di tempo. Durante la fase finale del lavoro Wiles cominciò a considerare il fatto che l'intera sua dimostrazione si basava sull'uso di una tecnica di cui aveva scoperto l'esistenza soltanto pochi mesi prima. Cominciò a chiedersi se stava utilizzando il metodo di Kolyvagin-Flach in maniera totalmente corretta.

«In quell'anno lavorai molto duramente per cercare di far funzionare il metodo di Kolyvagin-Flach, ma esso coinvolgeva una gran quantità di strumenti sofisticati con cui non avevo una grande familiarità. C'era un sacco di geometria algebrica che mi imponeva di imparare un sacco di nuova matematica. Poi, più o meno all'inizio del gennaio del 1993, decisi che avevo bisogno di confidarmi con qualcuno che fosse esperto del tipo di tecniche geometriche a cui facevo appello per la dimostrazione. Volevo scegliere con molta cura la persona con cui confidarmi, poiché avrebbe dovuto mantenere il riserbo. Scelsi di parlarne con Nick Katz.»

Il professor Nick Katz lavorava anch'egli presso il dipartimento di matematica dell'Università di Princeton e conosceva Wiles da anni. Ma nonostante la loro vicinanza Katz era all'oscuro di ciò che stava avvenendo letteralmente sulla soglia del suo ufficio. «Un giorno Andrew venne da me all'ora del tè e mi chiese se potevo passare dal suo ufficio: c'era qualcosa di cui voleva parlarmi. Non avevo idea di cosa potesse essere. Andai da lui e dopo che fui entrato chiuse la porta. Mi disse che pensava di essere in grado di dimostrare la congettura di Taniyama-Shimura. Ero semplicemente attonito, sbalordito: era una cosa fantastica.

«Mi spiegò che una grossa parte della dimostrazione si basava sul suo ampliamento del lavoro di Flach e Kolyvagin, ma che era una faccenda piuttosto tecnica. Si sentiva davvero incerto su questa parte altamente tecnica della dimostrazione e voleva esaminarla attentamente con qualcuno per essere sicuro che fosse corretta. Pensava che io fossi la persona giusta per aiutarlo a controllarla, ma credo che ci fosse un'altra ragione per cui si era rivolto in particolare a me. Era sicuro che avrei tenuto la bocca chiusa e non avrei parlato con altre persone della dimostrazione.»

Dopo sei anni di isolamento Wiles aveva tradito il segreto. Katz dovette affrontare montagne di calcoli spettacolari creati con una moltitudine di tecniche. Praticamente tutto quello che Wiles aveva fatto era rivoluzionario, e Katz diede un gran contributo di idee sul modo migliore di esaminarlo a fondo: «Ciò che Wiles doveva chiarire era così voluminoso e lungo che cercare di chiarirlo in conversazioni informali nel suo ufficio non avrebbe funzionato. Per qualcosa di così grosso avevamo proprio bisogno della struttura formale di un programma di lezioni, altrimenti la cosa sarebbe degenerata. Ecco, è per questo motivo che decidemmo di organizzare il seminario».

Convenirono che la miglior strategia sarebbe stata quella di annunciare una serie di lezioni aperte agli studenti laureati del dipartimento. Wiles avrebbe tenuto il corso e Katz sarebbe stato fra il pubblico. Il corso avrebbe effettivamente coperto la parte della dimostrazione che aveva bisogno di essere controllata, ma gli studenti ne sarebbero rimasti all'oscuro. Il bello era che questo modo di mascherare il controllo della dimostrazione avrebbe costretto Wiles a spiegare ogni cosa passo a passo, e tuttavia non avrebbe sollevato alcun sospetto all'interno del dipartimento. Per quel che riguardava tutti gli altri si trattava semplicemente di un corso per laureati come un altro.

«Così Andrew annunciò questo corso di lezioni intitolato Calcoli sulle curve ellittiche, ricorda Katz con un sorriso malizioso, «che è un titolo assolutamente innocuo: potrebbe significare qualunque cosa. Non citò Fermat, non citò Taniyama-Shimura, partì tuffandosi direttamente nell'esecuzione di calcoli tecnici. Non esisteva al mondo un modo in cui qualcuno potesse indovinare il vero argomento del corso. Era fatto in maniera tale che i calcoli, a meno che non se ne conoscesse lo scopo, sarebbero apparsi incredibilmente tecnici e tediosi. E quando non sai a cosa serve la matematica, è impossibile seguirla. E piuttosto difficile da seguire anche quando sai a che cosa serve. Comunque sia, uno dopo l'altro gli studenti si defilarono e dopo qualche settimana io ero la sola persona rimasta ad assistere.»

Katz sedeva nella sala in cui si tenevano le lezioni e ascoltava attentamente ogni passaggio del calcolo di Wiles. La conclusione fu che il metodo di Kolyvagin-Flach sembrava funzionare perfettamente. Inoltre, nessun altro nel dipartimento si rese conto di ciò che era avvenuto. Nessuno sospettava che Wiles era sul punto di reclamare il premio più importante della matematica. Il suo piano era perfettamente riuscito.

Una volta terminata la serie di lezioni, Wiles dedicò tutti i suoi sforzi al completamento della dimostrazione. Aveva applicato con successo il metodo di Kolyvagin-Flach a una famiglia di equazioni ellittiche dopo l'altra, e a quel punto solo un'ultima famiglia rifiutava di arrendersi alla tecnica. Wiles descrive in che modo cercò di completare l'ultima parte della dimostrazione: «Una mattina alla fine di maggio Nada era fuori con i bambini e io sedevo alla mia scrivania pensando alla famiglia di equazioni ellittiche rimasta. Per caso stavo sfogliando un articolo di Barry Mazur e c'era una frase che catturò proprio la mia attenzione. Citava un procedimento del diciannovesimo secolo, e di colpo mi resi conto che avrei potuto utilizzarlo per far funzionare il metodo di Kolyvagin-Flach con l'ultima famiglia di equazioni ellittiche. Proseguii fino al pomeriggio e dimenticai di scendere per pranzo, e più o meno alle tre o alle quattro ero veramente convinto che ciò avrebbe risolto

l'ultimo problema rimasto. Accadde circa all'ora del tè; scesi dabbasso e Nada era molto sorpresa che arrivassi così tardi. Allora le dissi: "o risolto l'Ultimo Teorema di Fermat"».

La conferenza del secolo

Dopo sette anni di sforzi ostinati Wiles aveva completato una dimostrazione della congettura di Taniyama-Shimura. Dopo averlo sognato per trent'anni, aveva dunque dimostrato l'Ultimo Teorema di Fermat. Ora era tempo di comunicarlo al resto del mondo.

«Così nel maggio 1993 ero convinto di avere nelle mani tutto l'Ultimo Teorema di Fermat», ricorda Wiles. «Volevo ancora controllare un altro po' la dimostrazione, ma c'era alle porte un convegno che si sarebbe tenuto alla fine di giugno a Cambridge, e pensavo che sarebbe stato un luogo stupendo per dare l'annuncio della dimostrazione: era la mia città natale, e lì avevo studiato dopo la laurea.»

Il convegno si sarebbe tenuto al Sir Isaac Newton Institute, un centro di ricerca unico nel suo genere, consacrato a brevi e intense collaborazioni fra scienziati per la risoluzione di problemi di matematica e di fisica. In quell'occasione era in programma un workshop sulla teoria dei numeri dal titolo oscuro di «*L*-funzioni e aritmetica». Uno degli organizzatori era John Coates, il supervisore del dottorato di Wiles: «Facemmo venire persone da ogni parte del mondo che stavano lavorando su questo ambito generale di problemi, e naturalmente Andrew fu una delle persone che invitammo. Avevamo programmato una settimana di conferenze ravvicinate e, dato che c'era una gran richiesta di spazi disponibili per le singole conferenze, originariamente avevo assegnato ad Andrew solo due spazi. Ma poi capii che aveva bisogno di un terzo spazio e così decisi di fatto di rinunciare al mio per lasciar posto alla sua terza conferenza. Sapevo che aveva qualche grosso risultato da annunciare, ma non avevo idea di cosa fosse».

Quando arrivò a Cambridge, Wiles aveva a disposizione due settimane e mezzo prima che iniziassero le sue conferenze, e voleva sfruttare al massimo l'opportunità: «Decisi che avrei controllato la dimostrazione con uno o due esperti, in particolare la parte su Kolyvagin-Flach. La prima persona a cui diedi la dimostrazione fu Barry Mazur. Penso di avergli detto: Ho qui un manoscritto con la dimostrazione di un certo teorema. Per un po' parve molto perplesso, e allora gli dissi: Be', dagli un occhiata. Credo che gli ci volle un certo tempo per afferrare la cosa. Sembrava stupefatto. A ogni modo gli dissi che speravo di parlarne al convegno, e che mi avrebbe davvero fatto piacere che lui provasse a controllarla di nuovo».

Uno dopo l'altro, i più eminenti esperti in teoria dei numeri cominciarono ad arrivare al Newton Institute. Arrivò anche Ken Ribet, i cui calcoli nel 1986 avevano ispirato i sette anni di dure fatiche di Wiles. «Giunsi a questo convegno sulle *L*-funzioni e le curve ellittiche, e non sembrava essere niente di straordinario finché alcune persone non cominciarono a dirmi di aver sentito strane voci sulla serie di

conferenze proposte da Andrew Wiles. Si diceva che avesse dimostrato l'Ultimo Teorema di Fermat, e io pensavo proprio che fossero tutte panzane. Pensavo che non poteva in alcun modo essere vero. C'è una quantità di casi in cui cominciano a circolare voci nell'ambiente matematico, specialmente per posta elettronica, e l'esperienza dimostra che non bisognerebbe dar loro troppo credito. Ma quelle voci erano molto persistenti, e Andrew si rifiutava di rispondere alle domande e si comportava in modo molto, molto sospetto. John Coates gli chiese: Andrew, che cos'hai dimostrato? Dobbiamo convocare la stampa?. Andrew si limitò a scuotere la testa e a serrare le labbra. Stava proprio puntando alla drammatizzazione.

«Poi un pomeriggio Andrew venne da me e si mise a farmi domande su ciò che avevo fatto nel 1986 e su una parte della storia delle idee di Frey. Pensai, è incredibile, deve aver dimostrato la congettura di Taniyama-Shimura e l'Ultimo Teorema di Fermat, altrimenti non mi chiederebbe queste cose. Non gli domandai direttamente se fosse vero perché vedevo che si stava comportando in modo molto riservato e sapevo che non avrei ottenuto una risposta franca. Così dissi solo qualcosa come: Bene Andrew, se hai l'occasione di parlare di questo lavoro, ecco quello che successe. Lo guardai come se sapessi qualcosa, ma in realtà non sapevo quel che stava accadendo. Stavo ancora cercando di indovinare».

La reazione di Wiles alle voci e alla pressione che montava era semplice: «In vista delle mie conferenze la gente mi chiedeva che cosa avevo intenzione di dire esattamente. Cosi rispondevo, be', venite alle mie conferenze e vedrete».

Il titolo della serie di conferenze di Wiles era «Forme modulari, curve ellittiche e rappresentazioni di Galois». Una volta ancora, come nel caso delle lezioni che Wiles aveva tenuto a Princeton quello stesso anno a beneficio di Nick Katz, il titolo delle conferenze era così vago che non forniva tracce sul suo scopo finale. La prima conferenza di Wiles fu in apparenza banale: vi si gettavano le basi per l'attacco alla congettura di Taniyama-Shimura, a cui erano riservate la seconda e la terza conferenza. La maggioranza del pubblico era completamente all'oscuro delle chiacchiere, non comprendeva lo scopo della conferenza e prestava poca attenzione ai dettagli. Quelli che sapevano erano alla ricerca del minimo indizio che potesse dare credito alle voci.

Subito dopo la fine della conferenza, la fabbrica delle voci si rimise in moto con rinnovato vigore e i messaggi di posta elettronica volarono in tutto il mondo, Il professor Karl Rubin, un ex studente di Wiles, inviò regolari resoconti ai suoi colleghi in America:

```
Data:  Lunedì 21 giugno 1993 13: 33: 06
Oggetto:    Wiles

Ciao.   Andrew ha tenuto il suo primo discorso oggi. Non ha
annunciato una dimostrazione della Taniyama-
Shimura, ma si sta muovendo in quella direzione e ha a disposizione a
ltre due conferenze. È ancora  molto reticente sul risultato finale.
 Secondo me la cosa più probabile è che abbia intenzione di dimostra
re che se E è una curva ellittica sopra Q e la rappresentazione di
 Galois sui punti di ordine 3 su E soddisfa a certe ipotesi, allora
E è  modulare. Da quanto ha detto sembra che non dimostrerà l'intera
 congettura. Quello che non so è se ciò si applicherà alla curva di
```

Trey, e quindi se dirà qualcosa su Fermat. Vi terrò informati.

Karl Rubin
Ohio State University

Quel pomeriggio uno degli studenti di dottorato che aveva assistito alla conferenza di Wiles corse ai botteghini degli allibratori per scommettere dieci sterline che in una settimana l'Ultimo Teorema di Fermat sarebbe stato risolto. L'allibratore però annusò puzza di bruciato e rifiutò di accettare la scommessa, nonostante che l'Ultimo Teorema di Fermat avesse vanificato gli sforzi delle più grandi menti del pianeta per più di tre secoli, persino gli allibratori cominciavano a sospettare che si fosse sul punto di dimostrarlo.

Il giorno successivo molte più persone erano venute a conoscenza delle voci, e così il pubblico della seconda conferenza era significativamente più numeroso. Wiles lo stuzzicò con un calcolo intermedio che mostrava che egli stava chiaramente cercando di venire alle prese con la congettura di Taniyama-Shimura, ma la platea era lasciata ancora nella situazione di chiedersi se Wiles avesse fatto abbastanza per dimostrarla e, di conseguenza, per dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat. Una nuova raffica di messaggi di posta elettronica rimbalzò sui satelliti.

Data: Martedì 22 giugno 1993 13:10:39
Oggetto: Wiles

Nessun' altra vera novità nella conferenza di oggi. Andrew ha enunciato un teorema generale sull'innalzamento delle rappresentazioni di Galois in linea con quanto avevo ipotizzato ieri. Non sembra che il teorema si applichi a tutte le curve ellittiche ma la battuta finale ci sarà domani.
Non so proprio perché stia procedendo in questo modo. È chiaro che lui sa ciò che dirà domani. Questa è un'impresa davvero poderosa a cui sta lavorando da anni. E sembra fiducioso. Vi farò sapere quello che succederà domani.

Karl Rubin
Ohio State University

«Il 23 giugno Andrew cominciò la sua terza e ultima conferenza», ricorda John Coates. «La cosa notevole era che praticamente tutti coloro che avevano contribuito alle idee su cui si basava la dimostrazione erano lì nella sala: Mazur, Ribet, Kolyvagin e molti, molti altri.»

A quel punto le voci erano così insistenti che all'ultima conferenza si presentò l'intera comunità matematica di Cambridge. I più fortunati si accalcarono nell'auditorio, mentre gli altri dovettero attendere nel corridoio, dove se ne stavano in punta di piedi a sbirciare dalla finestra. Ker Ribet aveva fatto in modo di assicurarsi di non mancare alla più importante rivelazione matematica del secolo: «Arrivai abbastanza presto e mi sedetti in prima fila insieme a Barry Mazur. Avevo con me la macchina fotografica proprio per immortalare l'evento. C'era un'atmosfera molto carica e la gente era molto eccitata. Di sicuro avevamo la sensazione di stare partecipando a un momento storico. Prima e durante la conferenza le persone avevano larghi sorrisi sul volto. La tensione si era accumulata nel corso di parecchi

giorni. Finché arrivò questo momento meraviglioso in cui ci stavamo avvicinando alla dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat».

Barry Mazur aveva già ricevuto una copia della dimostrazione da Wiles, ma anche lui rimase sorpreso dalla rappresentazione. «Non ho mai visto una conferenza cosí magnifica, piena di idee tanto meravigliose, con una tale tensione drammatica e tutta quella aspettativa. C'era una sola conclusione possibile.»

Dopo sette anni di intenso lavoro Wiles stava per annunciare la sua dimostrazione al mondo. Curiosamente Wiles non riesce a ricordare con grande precisione gli ultimi momenti della conferenza, ma ricorda bene l'atmosfera: «Benchè la stampa avesse già fiutato qualcosa, fortunatamente non era presente alla conferenza. Ma verso la fine c'erano moltissime persone nel pubblico che scattavano fotografie, e il direttore dell'istituto era venuto preparato con una bottiglia di champagne. C'era un tipico silenzio solenne mentre leggevo la dimostrazione ad alta voce, e poi scrissi l'enunciato dell'Ultimo Teorema di Fermat. Dissi: "Penso di fermarmi qui", e quindi ci fu un applauso prolungato».

Le conseguenze

Stranamente Wiles ebbe un atteggiamento ambivalente nei riguardi della conferenza: «Naturalmente fu un grande momento, ma provavo sensazioni contraddittorie. Aveva fatto parte di me per sette anni, aveva costituito tutta la mia vita di lavoro. Ero così assorbito dal problema da avere realmente la sensazione che appartenesse solo a me, ma ora stavo lasciando la presa. Avevo la sensazione che stessi rinunciando a una parte di me».

Il suo collega Ken Ribet non aveva incertezze di quel genere: «Fu un evento assolutamente straordinario. Voglio dire, quando vai a un convegno c'è qualche conferenza di routine, c'è qualche buona conferenza e c'è qualche conferenza molto speciale, ma solo una volta nella vita assisti a una conferenza in cui qualcuno afferma che risolverà un problema che resiste da trecentocinquant'anni. Ci guardavamo l'un l'altro e dicevamo, mio Dio, siamo appena stati testimoni di un evento storico. Poi vi furono alcune domande su aspetti tecnici della dimostrazione e su possibili applicazioni ad altre equazioni, e quindi ci fu di nuovo silenzio e tutto a un tratto una seconda tornata di applausi. La conferenza successiva fu tenuta da un certo Ken Ribet, il sottoscritto. Tenni la mia conferenza, la gente prese appunti, applaudì, e nessuno dei presenti, incluso io stesso, aveva idea di quello che avevo detto».

Mentre i matematici diffondevano la buona notizia per posta elettronica, il resto del mondo dovette attendere i telegiornali della sera o i quotidiani del giorno dopo. Sul Newton Institute calarono troupe televisive e giornalisti scientifici, tutti a chiedere interviste con «il più grande matematico del secolo». «È scoccata l'ora per l'ultimo enigma della matematica» esclamava il *Guardian*, e la prima pagina di *Le Monde* titolava: «Le Théorèm de Fermat enfin résolu».

Ovunque i giornalisti chiedevano ai matematici la loro opinione di esperti sul lavoro di Wiles e si pretendeva che i professori, che si stavano ancora riprendendo dallo shock, spiegassero brevemente la dimostrazione matematica più complicata di ogni tempo, o rilasciassero una breve dichiarazione che chiarisse la congettura di Taniyama-Shimura.

Il professor Shimura seppe della dimostrazione della sua congettura leggendo la prima pagina del *New York Times*. Il titolo diceva: «Eureka!. Finalmente svelato un secolare mistero matematico». Ora, trentacinque anni dopo che il suo amico Yutaka Taniyama si era suicidato, la congettura che avevano creato insieme era stata confermata. Per molti matematici di professione la dimostrazione della congettura di Taniyama-Shimura era assai più importante della soluzione dell'Ultimo Teorema di Fermat, poiché aveva conseguenze incommensurabili per molti altri teoremi matematici. Ma i giornalisti che seguirono la storia tendevano a concentrarsi su Fermat e citavano Taniyama-Shimura solo di passaggio, se non per nulla.

Shimura, un uomo mite e modesto, non fu eccessivamente infastidito dalla mancanza di attenzione per il suo ruolo nella dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat, ma era turbato per il fatto che lui e Taniyama fossero stati retrocessi al ruolo di un nome. «E molto curioso che la gente scriva della congettura di Taniyama-Shimura, ma nessuno scriva di Taniyama e Shimura.»

Era la prima occasione in cui la matematica finiva sulle prime pagine da quando Yoichi Miyaoka aveva annunciato la sua supposta dimostrazione nel 1988: la sola differenza era che questa volta la copertura giornalistica fu due volte maggiore e nessuno espresse dubbi sui calcoli. Da un giorno all'altro Wiles divenne il matematico più famoso - di fatto il solo matematico famoso - al mondo, e la rivista People lo inserì perfino nella lista delle «venticinque personalità più affascinanti dell'anno», insieme alla principessa Diana e a Oprah Winfrey. L'investitura definitiva venne da una catena internazionale di abbigliamento che chiese al genio dalle maniere gentili di firmare la sua nuova linea per uomo.

Mentre il circo dei mass media continuava e i matematici traevano il massimo vantaggio dal fatto di trovarsi sotto la luce dei riflettori, era già in corso il serio lavoro di verifica della dimostrazione. Come accade per tutte le discipline scientifiche, ogni nuovo lavoro di matematica deve essere esaminato a fondo. Prima di poter essere accettata come accurata e corretta, la dimostrazione di Wiles doveva essere sottomessa alla dura prova del giudizio di un comitato accademico. Anche se le conferenze di Wiles all'Isaac Newton Institute avevano fornito a tutti uno schema dettagliato dei suoi calcoli, ciò non possedeva i requisiti di una verifica ufficiale. Il protocollo accademico richiede che ogni matematico sottoponga un manoscritto completo a una rivista autorevole, che lo invia quindi a un'equipe di giudici, il cui compito è di esaminare la dimostrazione riga per riga. Wiles dovette passare l'estate in attesa del rapporto dei giudici, sperando che alla fine avrebbe ottenuto la loro benedizione.

7.
UN PICCOLO PROBLEMA

Un problema degno di essere attaccato
Si dimostra tale resistendo agli attacchi.

Piet Hein

Non appena si concluse la conferenza a Cambridge, il comitato Premio Wolfskehl venne informato della dimostrazione di Wiles. Il premio non poteva essere assegnato immediatamente poiché, com'è ovvio, le regole della competizione esigevano una verifica da parte di altri matematici e una pubblicazione ufficiale della dimostrazione:

> La Königliche Gesellshaft der Wissenschaften di Gottinga…prenderà in considerazione quegli scritti matematici comparsi sotto forma di monografia sui periodici, o venduti nelle librerie…L'assegnazione del Premio da parte della Società non avverrà prima che siano trascorsi due anni dalla pubblicazione dello scritto che è stato premiato. Quest'intervallo di tempo ha lo scopo di consentire ai matematici tedeschi e stranieri di esprimere la propria opinione sulla validità della soluzione pubblicata.

Wiles presentò il suo manoscritto alla rivista *Inventiones Mathematicae,* dopodichè il direttore della rivista Barry Mazur diede inizio al processo di selezione dei giudici. Il saggio di Wiles coinvolgeva un tal numero di tecniche, sia antiche sia moderne, che Mazur prese la decisione eccezionale di dare l'incarico non a due o tre giudici, come avviene di solito, ma a sei. Ogni anno vengono pubblicati trentamila saggi nelle riviste di tutto il mondo, ma date le dimensioni e l'importanza del manoscritto di Wiles, sarebbe stato effettuato un esame di accuratezza straordinaria. Per semplificare le cose, la dimostrazione di duecento pagine fu divisa in sei sezioni e a ciascuno dei giudici fu affidata la responsabilità di uno di questi capitoli.

Nick Katz, che aveva già esaminato una parte della dimostrazione di Wiles quello stesso anno, ebbe la responsabilità del terzo capitolo: «Quell'estate sarei stato a Parigi per lavorare all'Institut des Hautes Etudes Scientifiques, e portai con me tutte le duecento pagine della dimostrazione; il mio capitolo era di settanta pagine. Quando arrivai là decisi che volevo avere una seria assistenza tecnica, e così insistetti perché Luc Illusie, che si trovava anche lui a Parigi, divenisse un giudice aggiunto per questo capitolo. Ci incontrammo alcune volte alla settimana per tutta l'estate, facendoci in sostanza lezione a vicenda per cercare di comprendere il capitolo. Non facevamo letteralmente nient'altro che esaminare il manoscritto riga per riga per cercare di assicurarci che non ci fosse alcun errore. A volte qualcosa ci disorientava e così ogni giorno, talvolta due volte al giorno, spedivo una domanda ad Andrew per posta

elettronica: non capisco cosa affermi in questa pagina o mi sembra che ci sia un errore in questa riga. Di solito quello stesso giorno o il successivo ricevevo una risposta che chiariva la questione e quindi passavo al problema successivo».

La dimostrazione era un'argomentazione gigantesca, costruita in modo intricato da centinaia di calcoli matematici, tenuti insieme da migliaia di nessi logici. Se uno solo dei calcoli fosse stato errato o uno dei nessi fosse saltato, l'intera dimostrazione sarebbe stata potenzialmente priva di valore. Wiles, che nel frattempo era tornato a Princeton, aspettava con ansia che i giudici completassero il loro compito. «Non mi piace darmi ai festeggiamenti finché non ho tutte le carte in mano. Nel frattempo dovevo affrontare il lavoro impegnativo di occuparmi delle domande che ricevevo per posta elettronica dai giudici. Ero ancora piuttosto fiducioso che nessuna di queste domande mi avrebbe causato troppi problemi.» Wiles aveva già controllato e ricontrollato la dimostrazione prima di consegnarla ai giudici, dunque si aspettava cose poco più rilevanti degli equivalenti matematici di sviste grammaticali o tipografiche, errori banali che avrebbe potuto correggere immediatamente.

«Queste domande continuarono in modo relativamente tranquillo fino ad agosto», ricorda Katz, «quando arrivai a quello che sembrava semplicemente un altro piccolo problema. Un giorno, intorno al 23 agosto, mando una domanda per posta elettronica ad Andrew, ma è un po' più complicata del solito, così lui mi risponde con un fax. Ma il fax non sembra dare una risposta alla domanda e così gli scrivo di nuovo per posta elettronica e ricevo un altro fax che ancora non mi soddisfa.»

Wiles aveva supposto che questo errore fosse superficiale come tutti gli altri, ma l'insistenza di Katz lo costrinse a prenderlo sul serio: «Non riuscii a risolvere subito questa questione in apparenza molto innocente. Per un po' mi sembrò che il problema fosse dello stesso ordine degli altri, ma poi a settembre cominciai a capire che non si trattava solo di una difficoltà di poco conto bensì di un vizio fondamentale.

Era un errore in una parte cruciale dell'argomentazione che coinvolgeva il metodo di Kolyvagin-Flach, ma era qualcosa di così sottile che fino a quel momento mi era completamente sfuggito. L'errore è così astratto che non è possibile descriverlo in parole semplici. Perfino per spiegarlo a un matematico sarebbe necessario che egli passasse due o tre mesi a studiare quella parte del manoscritto nei minimi dettagli».

In sostanza il problema era questo: non c'era alcuna garanzia che il metodo di Kolyvagin-Flach funzionasse come Wiles aveva inteso. Esso avrebbe dovuto estendere la dimostrazione dal primo elemento di tutte le curve ellittiche e di tutte le forme modulari a tutti gli altri elementi, fornendo il meccanismo per trasmettere la caduta da una tessera di domino alla successiva. In origine il metodo di Kolyvagin-Flach funzionava solo in un numero limitato di circostanze, ma Wiles riteneva di averlo adattato e rafforzato a sufficienza perché funzionasse in tutti i casi di cui aveva bisogno. Secondo Katz ciò non era necessariamente vero, e le conseguenze erano drammatiche e devastanti.

L'errore non significava che il lavoro di Wiles fosse irrimediabilmente perduto, ma significava sicuramente che egli avrebbe dovuto rafforzare la sua dimostrazione. L'assolutismo della matematica richiedeva a Wiles di dimostrare oltre ogni dubbio che il suo metodo funzionava per ogni elemento di ogni *E*-serie e di ogni *M*-serie.

Un tappeto troppo grande

Quando Katz si rese conto dell'importanza dell'errore che aveva individuato, cominciò a chiedersi come gli fosse potuto sfuggire in primavera, quando Wiles gli aveva tenuto lezione al solo scopo di individuare ogni errore. «Penso che la risposta sia che quando ascolti una lezione c'è una tensione reale fra comprendere tutto e permettere all'insegnante di procedere. Se interrompi a ogni secondo - non capisco questo o non capisco quello - allora il poveretto non riesce mai a spiegare nulla e tu non fai alcun progresso. D'altra parte, se non lo interrompi mai, perdi in qualche modo il filo e continui a far gentilmente sì con la testa, ma in realtà non verifichi un bel niente. C'è questa tensione reale tra il porre troppe domande e il porne troppo poche, e ovviamente verso la fine di quelle lezioni, che è il momento in cui mi sfuggì il problema, avevo la tendenza a porre troppo poche domande.»

Solo qualche settimana prima i giornali di tutto il mondo avevano definito Wiles il più brillante matematico del mondo, e dopo trecentocinquant'anni di frustrazioni i teorici dei numeri pensavano di aver avuto finalmente la meglio su Pierre de Fermat. Ora Wiles era di fronte all'umiliazione di dover ammettere che aveva compiuto uno sbaglio. Prima di confessare l'errore, decise di cercare di compiere uno sforzo intenso per riempire la lacuna. «Non potevo rinunciare. Ero ossessionato da questo problema e pensavo ancora che il metodo di Kolyvagin-Flach avesse soltanto bisogno di un piccolo aggiustamento. Mi occorreva solo modificarlo un po' in qualche modo e poi avrebbe funzionato alla perfezione. Decisi di ritornare alle mie vecchie abitudini e di isolarmi completamente dal mondo esterno. Dovevo trovare di nuovo la concentrazione, ma questa volta in circostanze molto più difficili. Per molto tempo pensai che la soluzione fosse giusto dietro l'angolo, che mi fosse semplicemente sfuggito qualcosa di semplice e che tutto sarebbe andato a posto per il giorno dopo. Naturalmente avrebbe potuto andare in questo modo, ma sembrava che con il passare del tempo il problema diventasse più intrattabile.»

La speranza era di riuscire a rimediare all'errore prima che la comunità matematica si rendesse conto anche solo dell'esistenza di un errore. La moglie di Wiles, che era già stata testimone dei sette anni di fatiche dedicati alla dimostrazione originaria, ora doveva osservare la lotta angosciosa di suo marito con un errore che avrebbe potuto distruggere tutto. Wiles ricorda il suo ottimismo: «A settembre Nada mi disse che la sola cosa che desiderava per il suo compleanno era una dimostrazione corretta. Il compleanno cade il 6 ottobre. Avevo soltanto due settimane per consegnare la dimostrazione, e non ci riuscii».

Fu un periodo di tensione anche per Nick Katz: «In ottobre le sole persone a conoscenza dell'errore eravamo io stesso, Illusie, i giudici degli altri capitoli e Andrew. In teoria questo era tutto. A mio modo di vedere, come giudice ero tenuto ad agire con riservatezza. Certamente non pensavo che fosse affar mio discutere questo argomento con nessuno eccetto che con Andrew, così non dicevo una parola al riguardo. Credo che all'esterno lui desse un'impressione di normalità, ma a quel punto stava tenendo nascosto qualcosa al mondo, e credo che si sentisse piuttosto a

disagio per questo. Andrew tendeva a credere che gli bastasse solo un altro giorno per venirne a capo, ma quando l'autunno passò, e il manoscritto non arrivava, cominciò a circolare la voce che c'era un problema».

In particolare Ken Eibet, un altro dei giudici, cominciò a sentire la pressione di dover mantenere il segreto: «Per qualche motivo del tutto accidentale mi fu affibbiato il nome di Servizio Informazioni Fermat. All'inizio ci fu un articolo sul *New York Times* in occasione del quale Andrew mi aveva chiesto di parlare col giornalista al posto suo, e l'articolo diceva: Ribet che fa da portavoce ad Andrew Wiles..., o qualcosa di quel tenore. Dopodiché divenni una calamita per ogni sorta di interesse nell'Ultimo Teorema di Fermat, sia dall'interno della comunità matematica sia dall'esterno. Telefonava gente dai giornali, da ogni parte del mondo in effetti, e per un periodo di due o tre mesi tenni anche un gran numero di conferenze. In queste conferenze sottolineavo quale magnifico risultato fosse la dimostrazione e ne tracciavo le linee e parlavo delle parti che conoscevo meglio, ma dopo un po' la gente cominciò a diventare impaziente e a porre domande imbarazzanti.

«Consideri che Wiles aveva fatto questo annuncio pubblico, ma nessuno al di fuori del gruppo molto ristretto dei giudici aveva visto una copia del manoscritto. Così i matematici erano in attesa di questo manoscritto che Andrew aveva promesso poche settimane dopo il primo annuncio di giugno. La gente diceva, va bene, questo teorema è stato annunciato, d'accordo; ci piacerebbe vedere cosa sta accadendo. Che cosa sta facendo Wiles? Perché non abbiamo notizie? Erano un po' risentiti per il fatto di essere tenuti all'oscuro e volevano semplicemente sapere cosa stava succedendo. Poi le cose peggiorarono ancora a causa di questa nuvola che si addensava lentamente intorno alla dimostrazione, e la gente prese a parlarmi di queste voci che circolavano, secondo cui c'era una lacuna nel terzo capitolo. Mi chiedevano che cosa ne sapessi, e io non sapevo proprio cosa dire».

Con Wiles e i giudici che negavano di sapere dell'esistenza di una qualsiasi lacuna, o che al massimo si rifiutavano di fare commenti, le ipotesi iniziarono a diffondersi in maniera incontrollata. Disperati, i matematici cominciarono a scambiarsi messaggi per posta elettronica nella speranza di chiarire il mistero.

```
Data:      18 novembre 93 21: 04: 49 GMT
Oggetto:   Una lacuna nella dimostrazione di Wiles?

Circolano molte voci su una o più lacune nella dimostrazione di Wiles.
Lacuna significa crepa, fenditura, crepaccio, burrone o abisso? Qualcuno
ha informazioni attendibili?

Joseph. Lipman Purdue University
```

In ogni sala da tè di ogni dipartimento di matematica le chiacchiere attorno alla dimostrazione di Wiles montavano di giorno in giorno. In risposta alle voci e alle speculazioni per posta elettronica alcuni matematici tentarono di riportare un senso di calma nella comunità.

Data: 19 novembre 93 15:42:20 GMT
Oggetto: Risposta a: Una lacuna nella dimostrazione di Wiles?
Non possiedo alcuna informazione di prima mano, e non mi sento libero di discutere informazioni di seconda mano. Penso che il miglior consiglio per tutti sia di mantenere la calma e lasciare che i giudici assai competenti che stanno esaminando con cura il saggio di Wiles facciano il loro lavoro. Riferiranno i loro risultati quando avranno qualcosa di definitivo da dire. Chiunque abbia scritto un saggio o giudicato un saggio avrà familiarità con il fatto che nel processo di verifica della dimostrazione spesso sorgono questioni. Sarebbe sorprendente se questo non succedesse per un risultato così importante, con una dimostrazione così difficile.

Léonard Evens
North Western University

Nonostante i richiami alla calma, i messaggi di posta elettronica non diminuirono. Oltre a occuparsi del supposto errore, ora i matematici discutevano se anticipare l'annuncio dei giudici fosse un comportamento etico.

Data: 24 novembre 93 12:00:34 GMT
Oggetto: Altri pettegolezzi su Fermat

Immagino sia chiaro che dissento da coloro i quali affermano che non

dovremmo spettegolare sul fatto che la dimostrazione di Wiles dell'Ultimo Teorema di Fermat sia difettosa oppure no. Sono del tutto a favore di questo genere di pettegolezzi sempre che non li si prenda troppo sul serio. In particolare, non li considero malevoli poiché, difettosa o no che sia la dimostrazione di Wiles, sono sicuro che egli ha prodotto della matematica di assoluta qualità.

Dunque, ecco quello che ho ricevuto oggi, di *n*-esima mano...

Bob Silverman

Data: Lunedì 22 novembre 93 20:!6 GMT
Oggetto: Risposta a: Buco in Fermat.

La scosa settimana Coates ha affermato in una conferenza qui al Newton Institute che secondo lui c'è una lacuna nella parte della dimostrazione che
riguarda i «sistemi geometrici di Euler», e che porvi rimedio «potrebbe richiedere una settimana o potrebbe richiedere un mese». Gli ho parlato molte volte, ma non sono ancora sicuro su quale base faccia quest'affermazione: non ha una copia del manoscritto.

Per quanto ne so, la sola copia esistente a Cambridge è in mano a Richard Taylor, dato che è uno dei giudici dell'articolo per Inventiones, ed egli ha rifiutato con coerenza di fare commenti finchè tutti i giudici non raggiungano una conclusione comune. Quindi la situazione è confusa. Per quanto mi

riguardam non vedo come si possa considerare autorevole il punto di vista di Coates in questa fase: intendo aspettare il parere di Richard Taylor.

Richard Pinch

Mentre attorno alla sua irraggiungibile dimostrazione cresceva l'eccitazione, Wiles faceva del suo meglio per ignorare le controversie e le speculazioni. «In realtà mi isolai perché non volevo sapere quello che la gente diceva di me. Vivevo appartato, ma periodicamente il mio collega Peter Sarnak mi diceva: Sai, fuori c'è tempesta. Io ascoltavo, ma per quanto mi riguardava volevo proprio soltanto isolarmi completamente, soltanto concentrarmi sul problema.»

Peter Sarnak era entrato nel dipartimento di matematica di Princeton contemporaneamente a Wiles, e con gli anni i due erano diventati amici intimi. Durante quel periodo di grande agitazione Sarnak era una delle poche persone con cui Wiles si confidava. «Be', io non conoscevo gli esatti dettagli, ma era chiaro che lui stava tentando di superare quest'unica seria questione. Ma ogni volta che sistemava questa parte del calcolo, ciò causava qualche altra difficoltà in un'altra parte della dimostrazione. Era come se stesse cercando di sistemare un tappeto in una stanza troppo piccola. Così Andrew riusciva ad adattare il tappeto a un angolo solo per scoprire che si sollevava in un altro angolo. Se fosse o meno possibile adattare il tappeto alla stanza, era qualcosa che Andrew non era in grado di stabilire. Tenga presente che, anche con questo errore, Andrew aveva compiuto un passo gigantesco. Prima di lui non c'era nessuno che avesse un modo per affrontare la congettura di Taniyama-Shimura, ma adesso tutti erano davvero eccitati, perché lui ci presentava così tante idee nuove. Erano cose fondamentali e inedite che nessuno aveva preso in considerazione prima. Così, anche se non era possibile rimediare all'errore, si trattava comunque di un progresso molto importante; ma naturalmente Fermat sarebbe rimasto insoluto.»

Alla fine Wiles comprese che non poteva restare in silenzio per sempre. La soluzione dell'errore non era dietro l'angolo, ed era tempo di porre fine alle speculazioni. Dopo un autunno di deprimenti insuccessi, egli inviò alla bacheca elettronica di matematica il seguente comunicato:

Data: 4 dicembre 93 01:36:50 GMT
Oggetto: Il punto su Fermat

In considerazione delle speculazioni riguardo al punto in cui si trova il mio lavoro sulla congettura di Taniyama-Shimura e sull'Ultimo Teorema di Fermat, farò un breve resoconto della situazione. Nel corso del processo di revisione è emerso un certo numero di problemi, la maggior parte dei quali sono stati risolti, ma ce *n*'è uno in particolare che non ho appianato. La riduzione cruciale (di gran parte dei casi) della congettura di Taniyama-himura al calcolo del gruppo di Selmer è corretta. Tuttavia il calcolo finale di un preciso confine superiore per il gruppo di Selmer nel caso semistabile (della rappresentazione simmetrica quadrata associata a una forma modulare) così com'è non è ancora completo. Penso che sarò in grado di portarlo a termine nel prossimo futuro utilizzando le idee esposte nelle mie conferenze a Cambridge.

Il fatto che sul manoscritto rimanga molto lavoro da fare ne rende ancora inopportuna la distribuzione prima che vada in stampa. Durante il corso che terrò a Princeton a partire da febbraio fornirò un resoconto completo del mìo lavoro.

Andrew Wiles

Pochi si lasciarono convincere dall'ottimismo di Wiles. Erano passati quasi sei mesi senza che l'errore fosse stato corretto, e non c'era ragione di pensare che nei sei mesi successivi qualcosa sarebbe cambiato. In ogni caso, se davvero Wiles era in grado di «portarlo a termine nel prossimo futuro», perché preoccuparsi di inviare il comunicato? Perché non mantenere il silenzio per qualche altra settimana e poi distribuire il manoscritto completo? La comunità matematica sospettava che Wiles stesse semplicemente cercando di guadagnare altro tempo.

I giornali si gettarono di nuovo sulla vicenda, e ai matematici fu ricordata la fallita dimostrazione di Miyaoka nel 1988. La storia si ripeteva. Ora i teorici dei numeri erano in attesa del messaggio per posta elettronica che avrebbe chiarito perché la dimostrazione fosse irreparabilmente difettosa. Un pugno di matematici aveva espresso dubbi sulla dimostrazione già in estate, e sembrava che quel pessimismo fosse giustificato. Si dice che il professor Alan Baker si fosse offerto di scommettere cento bottiglie di vino contro una sola che la dimostrazione si sarebbe rivelata non valida entro un anno. Baker smentisce l'aneddoto, ma ammette orgogliosamente di aver manifestato un «salutare scetticismo».

A meno di sei mesi dalla conferenza al Newton Institute, il sogno d'infanzia di Wiles era a brandelli. Alla gioia, alla passione e alla speranza che lo avevano accompagnato negli anni trascorsi a eseguire calcoli in segreto si sostituirono l'imbarazzo e la disperazione. Wiles ricorda come il suo sogno d'infanzia fosse diventato un incubo: «Per i primi sette anni in cui lavorai al problema mi piaceva la battaglia personale. Non importava quanto fosse dura, non importava quanto gli ostacoli sembrassero insormontabili, ero impegnato nel mio problema preferito. Era la passione della mia infanzia, non potevo proprio soffocarla, non volevo abbandonarla nemmeno per un momento. Poi ne parlai in pubblico, e parlandone ci fu effettivamente un certo senso di perdita. Fu una sensazione molto confusa. Era bellissimo vedere altre persone che reagivano alla dimostrazione, vedere come le mie argomentazioni potevano cambiare completamente l'intero orientamento della matematica, ma allo stesso tempo era venuta meno quell'avventura di ricerca individuale. Ora il mio lavoro era accessibile a tutti e io non avevo più questo sogno personale da esaudire. E poi, quando sorse un problema, ci furono decine, centinaia, migliaia di persone che volevano distrarmi. Questo modo molto pubblico di fare matematica, questa sovraesposizione, non è certamente nel mio stile e non mi divertiva affatto».

Teorici dei numeri di tutto il mondo comprendevano bene la situazione di Wiles. Ken Ribet aveva vissuto lo stesso incubo otto anni prima, quando cercava di dimostrare il legame fra la congettura di Taniyama-Shimura e l'Ultimo Teorema di Fermat. «Stavo tenendo una conferenza sulla dimostrazione al Mathematical Sciences Research Institute di Berkeley e qualcuno del pubblico disse: Aspetti un minuto,

come sa che questa tal cosa è vera?. Io risposi immediatamente spiegando le mie ragioni e quello disse: Be', ma ciò non si applica in questa situazione. Fui preso da un subitaneo terrore. Di colpo mi trovai ricoperto di sudore, ed ero sconvolto. Poi mi resi conto che c'era solo una possibilità di giustificare il mio procedimento: ritornare all'opera fondamentale scritta sull'argomento e vedere esattamente che cosa era stato fatto in una situazione simile. Guardai nel saggio e vidi che in effetti il metodo si applicava nel mio caso, e nel giro di un giorno o due avevo sistemato tutta la faccenda. Nella conferenza successiva ero in grado di giustificare tutto. Ma vivi sempre con questa paura che quando annunci qualcosa di importante possa venire scoperto un errore fondamentale.

«Quando trovi un errore in un manoscritto, può andare in due modi. Talvolta hai un'immediata sensazione di sicurezza, e la dimostrazione può essere riportata in vita con poca difficoltà. E talvolta è l'opposto. È una cosa molto inquietante; quando ti rendi conto di aver compiuto un errore fondamentale e che non c'è alcun modo di rimediarvi, hai la sensazione di affondare. Quando si apre un buco è possibile che crolli completamente tutto il teorema, poiché più tenti di metterci una pezza più finisci nei guai. Ma nel caso di Wiles ciascun capitolo della dimostrazione costituiva un articolo importante in sé. Il manoscritto era il lavoro di sette anni, in sostanza erano sette importanti saggi cuciti insieme, e ciascuno dei saggi possedeva un grande interesse. L'errore si trovava in uno solo dei saggi, nel terzo capitolo, ma anche se si toglieva il terzo capitolo, ciò che restava era assolutamente magnifico.»

Ma senza il terzo capitolo non c'era alcuna dimostrazione della congettura di Taniyama-Shimura e quindi nemmeno una dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat. Nella comunità matematica c'era la sensazione frustrante che la dimostrazione alla base di due grandi problemi fosse in pericolo. Oltretutto, dopo sei mesi di attesa, ancora nessuno, a parte Wiles e i giudici, aveva accesso al manoscritto fondamentale. Cresceva la richiesta di un minor riserbo, di modo che tutti potessero vedere per conto proprio i dettagli dell'errore. La speranza era che qualcuno potesse individuare qualcosa che era sfuggito a Wiles, e concepire un calcolo che rimediasse alla lacuna nella dimostrazione. Alcuni matematici sostenevano che la dimostrazione era troppo preziosa per lasciarla nelle mani di un solo uomo. I teorici dei numeri erano diventati il bersaglio delle beffe degli altri matematici, che chiedevano loro sarcasticamente se avessero compreso o meno il significato della dimostrazione. Quello che avrebbe dovuto essere il momento più grandioso della storia della matematica si stava trasformando in una barzelletta.

Nonostante la pressione, Wiles rifiutò di rendere pubblico il suo lavoro. Dopo avervi consacrato sette anni di sforzi, non era pronto ad accomodarsi da una parte e guardare qualcun altro che completava la dimostrazione e gli sottraeva la gloria. La persona che dimostra l'Ultimo Teorema di Fermat non è quella che vi dedica la maggior mole di lavoro, è la persona che presenta la dimostrazione definitiva e completa. Wiles sapeva che, una volta che il suo manoscritto fosse stato pubblicato nella versione incompleta, egli sarebbe stato subito sommerso dalle domande e dalle richieste di coloro che presumevano di poter rimediare alla lacuna, e queste distrazioni avrebbero distrutto le sue speranze di correggere la dimostrazione.

Wiles tentò di ritornare alla stessa situazione di isolamento che gli aveva permesso di creare la dimostrazione originale, e riprese l'abitudine di studiare intensamente nella sua soffitta. Ogni tanto andava a passeggiare al lago Princeton, come aveva fatto in passato. Joggers, ciclisti e canottieri che una volta gli passavano accanto con un breve cenno di saluto adesso si fermavano e gli chiedevano se aveva fatto qualche progresso. Wiles era apparso sulle prime pagine dei giornali, la rivista *People* gli aveva dedicato un articolo, ed era stato perfino intervistato dalla CNN. L'estate precedente Wiles era diventato la prima celebrità matematica dei mondo, e ora la sua immagine era già appannata.

Nel frattempo al dipartimento di matematica continuavano i pettegolezzi. Il matematico di Princeton professor John H. Conway ricorda l'atmosfera della sala da tè del dipartimento: «Ci riunivamo per il tè alle tre in punto e davamo l'assalto ai biscotti. A volte discutevamo di problemi matematici, a volte discutevamo del processo a O.J. Simpson, e a volte discutevamo dei progressi di Andrew. Siccome in realtà a nessuno piaceva uscire allo scoperto e chiedergli come stava andando la dimostrazione, ci comportavamo un po' come cremlinologi. Così qualcuno diceva: Ho visto Andrew stamattina. Sorrideva? Be', sì, ma non sembrava troppo contento. Non potevamo fare altro che valutare il suo stato d'animo dall'espressione del volto».

Un incubo per posta elettronica

Mentre l'inverno avanzava, le speranze di compiere un progresso svanivano, e sempre più matematici sostenevano che era dovere di Wiles consegnare il manoscritto. Le voci continuavano a circolare: secondo un articolo di giornale Wiles aveva gettato la spugna e la dimostrazione era crollata. Benché questa fosse un'esagerazione, era certamente vero che Wiles aveva ormai passato in rassegna dozzine di approcci che avrebbero potuto aggirare l'errore e non riusciva a scorgere altre potenziali strade per raggiungere una soluzione.

Wiles confessò a Peter Sarnak che la situazione stava diventando disperata, e che era sul punto di accettare la sconfitta. Sarnak suggerì che le difficoltà fossero dovute in parte al fatto che Wiles non aveva nessuno su cui poter contare ogni giorno, nessuno su cui potesse riversare le proprie idee o che lo incoraggiasse a esaminare approcci meno ortodossi. Egli suggerì a Wiles di concedere la sua fiducia a qualcuno e di cercare nuovamente di riempire la lacuna. Wiles aveva bisogno di una persona che fosse esperta nel maneggiare il metodo di Kolyvagin-Flach e che potesse anche mantenere il segreto sui dettagli del problema. Dopo aver riflettuto a lungo sulla questione, decise di invitare a Princeton Richard Taylor, un assistente dell'Università di Cambridge, perché lavorasse al suo fianco.

Taylor era uno dei giudici responsabili della verifica della dimostrazione ed era anche un ex studente di Wiles, e come tale era doppiamente fidato. L'anno precedente era stato fra il pubblico del Newton Institute a guardare il suo ex

supervisore che presentava la dimostrazione del secolo. Ora era suo compito contribuire a salvare la dimostrazione incrinata.

A gennaio Wiles, con l'aiuto di Taylor, stava di nuovo esplorando instancabilmente il metodo di Kolyvagin-Flach, alla ricerca di una scappatoia per aggirare il problema. Di tanto in tanto, dopo giorni di sforzi, Wiles e Taylor entravano in un nuovo territorio, ma finivano inevitabilmente per ritrovarsi al punto da cui erano partiti. Essendosi avventurati più lontano di quanto avessero mai fatto e avendo fallito innumerevoli volte, i due matematici si resero conto di trovarsi al centro di un labirinto di inconcepibile vastità. La loro più grande paura era che il labirinto fosse illimitato e privo di uscite, e che sarebbero stati condannati a vagarvi senza una meta in eterno.

Poi, nella primavera del 1994, proprio quando sembrava che le cose non sarebbero potute andare peggio, sugli schermi di computer sparsi in tutto il mondo apparve il seguente messaggio:

```
Data:         3 aprile 94
Oggetto:      Di nuovo Fermat!

Oggi  c'è stato uno  sviluppo davvero sorprendente  in relazione
all'Ultimo  Teorema di Fermat.

Noam Elkies ha annunciato un controesempio, cosicché l'Ultimo Teorema di
 Fermat non è vero dopo tutto! Elkies ne ha parlato oggi all'Istituto. La
 soluzione a Fermat che egli formula coinvolge un esponente primo
incredibilmente grande (maggiore di  10^20), ma è costruttiva. L'idea
principale sembra essere un tipo di costruzione dei punti di Heegner,
associata a una riduzione davvero ingegnosa per passare dalle curve
modulari  alla curva di Fermat. Sembra che la parte veramente difficile
del ragionamento  consista nel mostrare che il campo di definizione
della soluzione  (che, a  priori, è un campo delle classi di anelli
di un campo quadratico immaginario)  in realtà si riduce a Q.

Non sono riuscito ad afferrare tutti i dettagli, che erano piuttosto
intricati.

Così pare che dopo tutto la congettura di Taniyama-Shimura non sia
vera. Gli esperti ritengono che possa essere ancora salvata, estendendo
il concetto di rappresentazione automorfa e introducendo la nozione di
«curve anomale» che darebbero ancora origine a una «rappresentazione
quasi automorfa».

Henry Darmon
Princeton University
```

Noam Elkies era il professore di Harvard che nel 1988 aveva scoperto un controesempio alla congettura di Eulero, dimostrando quindi che era falsa:

$$2.682.440^4+15.365.639^4+18.796.760^4=20.615.673^4$$

Ora, a quanto pareva, egli aveva scoperto un controesempio all'Ultimo Teorema di Fermat, dimostrando che anch'esso era falso. Questo era un colpo tragico per Wiles:

la ragione per cui egli non poteva correggere la dimostrazione era data dal fatto che l'ipotetico errore era una conseguenza diretta della falsità dell'Ultimo Teorema. Fu un colpo anche maggiore per la comunità matematica in generale, poiché se l'Ultimo Teorema di Fermat era falso, Frey aveva già mostrato che ciò avrebbe portato a un' equazione ellittica che non era modulare, cioè a una diretta contraddizione della congettura di Taniyama-Shimura. Non solo Elkies aveva trovato un controesempio a Fermat, ma aveva indirettamente scoperto un controesempio alla Taniyama-Shimura.

La morte della congettura di Taniyama-Shimura avrebbe avuto ripercussioni devastanti per tutta la teoria dei numeri, poiché per due decenni i matematici avevano dato tacitamente per scontata la sua verità. Nel capitolo 5 è stato spiegato che i matematici avevano scritto dozzine di dimostrazioni che si aprivano con la frase: «Supponendo che la congettura di Taniyama-Shimura sia vera...». Ma ora Elkies aveva mostrato che tale supposizione era sbagliata, e tutte quelle dimostrazioni erano crollate in un sol colpo. I matematici cominciarono immediatamente a richiedere maggiori informazioni e bombardarono di domande Elkies, ma non ci fu nessuna risposta e nessuna spiegazione dei motivi del suo ostinato silenzio. Nessuno riusciva a ottenere nemmeno gli esatti dettagli del controesempio.

Dopo uno o due giorni di trambusto alcuni matematici andarono a riguardarsi il messaggio e cominciarono a rendersi conto che, benché in genere portasse la data del 2 o del 3 aprile, ciò era dovuto al fatto di averlo ricevuto di seconda o di terza mano. Il messaggio originale era datato 1 aprile. Si trattava di una perfida burla perpetrata dal teorico dei numeri canadese Henri Darmon. Lo scherzo servì da giusta lezione per chi seminava chiacchiere su Fermat, e per un po' l'Ultimo Teorema, Wiles, Taylor e la dimostrazione difettosa furono lasciati in pace.

Quell'estate Wiles e Taylor non fecero alcun progresso. Dopo otto anni di sforzi ininterrotti e un'ossessione che durava da una vita, Wiles era pronto ad ammettere la sconfitta. Disse a Taylor che non riusciva a vedere alcuno scopo nel proseguire i loro tentativi di correggere la dimostrazione. Taylor aveva già programmato di trascorrere il mese di settembre a Princeton prima di ritornare a Cambridge, e così, nonostante lo sconforto di Wiles, propose che perseverassero per un altro mese. Se entro la fine di settembre non ci fosse stato alcun segno di una possibile soluzione, allora avrebbero rinunciato, avrebbero riconosciuto pubblicamente il loro fallimento e avrebbero reso nota la dimostrazione difettosa per dare ad altri l'opportunità di esaminarla.

Il regalo di compleanno

Benché la sua battaglia con il problema matematico più difficile del mondo sembrasse destinata a concludersi in un fallimento, Wiles riandò con la mente agli ultimi sette anni e fu rassicurato dalla consapevolezza che la gran parte del suo lavoro era ancora valida. Per cominciare, l'uso che aveva fatto Wiles dei gruppi di Galois aveva permesso a tutti di penetrare più addentro nel problema. Egli aveva dimostrato che il primo elemento di ogni equazione ellittica poteva essere ricondotto al primo

elemento di una forma modulare. A quel punto occorreva dimostrare che se un elemento dell'equazione ellittica era modulare, allora doveva esserlo anche il seguente, e dunque tutti gli elementi dovevano essere modulari.

Negli anni seguenti Wiles lottò per estendere la dimostrazione. Egli stava tentando di completare un approccio induttivo, e si era confrontato con la teoria di Iwasawa nella speranza che essa dimostrasse che se una tessera di domino cadeva, allora sarebbero cadute tutte. Da principio la teoria di Iwasawa sembrava abbastanza potente da provocare l' effetto domino richiesto, ma alla fine non fu più in grado di tenere fede alle aspettative di Wiles. Egli aveva dedicato due anni di sforzi a un vicolo cieco matematico.

Nell'estate del 1991, dopo un anno di stagnazione, Wiles si imbatté nel metodo di Kolyvagin e Flach e abbandonò la teoria di Iwasawa in favore di questa nuova tecnica. L'anno seguente vide l'annuncio della dimostrazione a Cambridge e Wiles fu proclamato eroe. Ma dopo nemmeno due mesi il metodo di Kolyvagin-Flach si rivelò difettoso, e da quel momento la situazione non aveva fatto che peggiorare. Ogni tentativo di correggere il metodo di Kolyvagin-Flach era fallito.

Tutto il lavoro di Wiles, a parte l'ultima fase in cui era coinvolto il metodo di Kolyvagin-Flach, conservava il proprio valore. Forse non sarebbe stato possibile dimostrare la congettura di Taniyama-Shimura e l'Ultimo Teorema di Fermat; tuttavia Wiles aveva fornito ai matematici una serie completa di tecniche e strategie nuove che potevano essere sfruttate per dimostrare altri teoremi. L'insuccesso di Wiles non era affatto un disonore, ed egli cominciava ad accettare la prospettiva della sconfitta.

Come consolazione Wiles voleva almeno capire perché aveva fallito. Mentre Taylor riesaminava metodi alternativi, egli decise di dedicare il mese di settembre ad analizzare un'ultima volta la struttura del metodo di Kolyvagin-Flach, cercando di individuare l'esatta ragione per cui non funzionava. Wiles ha un ricordo vivido di quegli ultimi fatidici giorni: «Un lunedì mattina, il 19 settembre, sedevo alla mia scrivania ad esaminare il metodo di Kolyvagin-Flach. Non è che credessi di riuscire a farlo funzionare, ma pensavo di poter almeno spiegare il motivo per cui non funzionava. Pensavo che mi stavo aggrappando a un filo, ma volevo sentirmi rassicurato. All'improvviso, in modo del tutto inaspettato, ebbi questa rivelazione incredibile. Capii che, anche se il metodo di Kolyvagin-Flach non funzionava completamente, era tutto ciò di cui avevo bisogno per far funzionare la teoria di Iwasawa. Capii che il metodo di Kolyvagin-Flach era sufficiente a far funzionare il mio approccio originario al problema, che risaliva a tre anni prima. Così la vera risposta al problema sembrava sorgere dalle ceneri di Kolyvagin-Flach».

La teoria di Iwasawa da sola si era rivelata insufficiente. Anche il metodo di Kolyvagin-Flach da solo si era rivelato insufficiente. Insieme si completavano alla perfezione. Fu un momento di ispirazione che Wiles non dimenticherà mai. Mentre raccontava quegli istanti, il ricordo fu così intenso che egli venne sopraffatto dall'emozione: «Era una soluzione così indescrivibilmente bella, era così semplice e così elegante. Non riuscivo a capire come mi potesse essere sfuggita e la fissai incredulo per venti minuti. Poi durante il giorno andai in giro per il dipartimento, e continuavo a tornare alla mia scrivania per vedere se la soluzione era ancora lì. Era

ancora lì. Non riuscivo a trattenermi, ero eccitatissimo. Fu il momento più importante della mia vita di lavoro. Niente di quello che potrò mai fare significherà altrettanto».

Non era solo la realizzazione di un sogno d'infanzia e il punto d'arrivo di otto anni di sforzi intensi. Dopo essere stato spinto sull'orlo della resa, Wiles aveva reagito dimostrando il proprio genio al mondo. Gli ultimi quattordici mesi avevano rappresentato il periodo più doloroso, umiliante e deprimente della sua carriera matematica. Adesso un'intuizione brillante aveva posto fine alla sua sofferenza.

«Così la prima notte tornai a casa e ci dormii sopra. Feci di nuovo una verifica la mattina dopo e per le undici ero soddisfatto. Scesi e dissi a mia moglie: Ce l'ho! Penso di averla trovata. E fu una cosa così inaspettata che lei pensò che parlassi di un giocattolo dei bambini o di qualcosa del genere, e mi chiese: Hai cosa?. Ho messo a posto la mia dimostrazione, dissi. Ce l'ho.»

Il mese seguente Wiles fu in grado di rimediare alla promessa che non era riuscito a mantenere l'anno prima. «Si stava avvicinando di nuovo il compleanno di Nada e mi ricordai che l'ultima volta non avevo potuto farle il regalo che desiderava. Questa volta, in ritardo di mezzo minuto per la cena, la sera del suo compleanno, riuscii a darle il manoscritto completo. Penso che quel regalo le piacque più di ogni altro che le avessi mai fatto.»

Data: 25 ottobre 94 11:04:11
Oggetto: Aggiornamento sull'Ultimo Teorema di Fermat

Questa mattina, sono stati consegnati per la pubblicazione due manoscritti:

Curve ellittiche modulari e Ultimo Teorema di Fermat,
di Andrew Wiles.

Proprietà teoriche di anello di alcune algebre di Hecke,
di Richard Taylor e Andrew Wiles.

Il primo (lungo) annuncia una dimostrazione, fra l'altro, dell'Ultimo Teorema di Fermat, e dipende dal secondo (breve) per un passaggio fondamentale.

Come molti di voi sanno, si scoprì che l'argomentazione delineata da Wiles nelle sue conferenze a Cambridge aveva una seria lacuna, e precisamente la costruzione di un sistema di Eulero. Dopo aver tentato senza successo di aggiustare quella costruzione, Wiles ritornò a un approccio diverso, che aveva provato in precedenza ma aveva abbandonato a favore dell'idea del sistema di Eulero. Egli è riuscito a completare la dimostrazione, nell'ipotesi che alcune algebre di Hecke siano intersezioni locali complete. Questa e le altre idee delineate nelle conferenze di Cambridge sono trattate minuziosamente nel primo manoscritto. Congiuntamente, Taylor e Wiles stabiliscono la proprietà necessaria delle algebre di Hecke nel secondo saggio.

Le linee generali dell'argomentazione sono simili a quelle che Wiles espo se a Cambridge. Il nuovo approccio si rivela significativamente più semplice e più breve di quello originale, a causa dell' eliminazione del sistema di Eulero. (In effetti, dopo aver visto questi manoscritti, Faltings ha scoperto, a quanto pare, un'ulteriore semplificazione

importante di questa parte dell’argomentazione.)

Versioni dei manoscritti sono in mano a un ristretto numero di persone da (in alcuni casi) alcune settimane. Benché sia saggio mantenersi prudenti ancora per un po’, c’è certamente motivo di essere ottimisti.

Karl Rubin
Ohio State University

8.
EPILOGO

Un temerario giovanotto di Rabat,
Trovò prove del teorema di Fermat,
Visse poi nel terrore,
Di scoprirvi un errore,
Quella di Wiles, sospettava, era migliore!

FERNANDO GOUVEA

Questa volta non c'erano dubbi sulla dimostrazione. I due saggi, centotrenta pagine in tutto, furono i manoscritti più scrutinati della storia e vennero infine pubblicati nel numero di maggio 1995 degli *Annals of Mathematics.*

Wiles si ritrovò di nuovo sulla prima pagina del *New York Times*, ma questa volta il titolo «Matematico dichiara risolto un classico enigma» era oscurato dalla notizia di un altro evento scientifico: «Scoperta sull'età dell'Universo pone un nuovo rompicapo cosmico». Se i giornalisti erano un po' meno entusiasti nei riguardi dell'Ultimo Teorema di Fermat, i matematici non avevano perso di vista il vero significato della dimostrazione. «Dal punto di vista matematico la dimostrazione finale e l'equivalente della fissione dell'atomo o della scoperta della struttura del Dna», annunciò John Coates. «Una dimostrazione di Fermat è un grande trionfo intellettuale e non bisogna dimenticare il fatto che essa ha rivoluzionato la teoria dei numeri in un sol colpo. Per me, il fascino e la bellezza del lavoro di Andrew è consistito nel fatto di essere stato un passo enorme per la teoria algebrica dei numeri.»

Grande matematica unificata

Nel corso dei suoi otto anni di traversie Wiles aveva riunito praticamente tutte le scoperte della teoria dei numeri del ventesimo secolo e le aveva fuse in un'unica dimostrazione di enorme portata. Aveva creato tecniche matematiche completamente nuove e aveva combinato quelle tradizionali in modi che non erano mai stati ritenuti possibili. Nel fare ciò aveva aperto nuove strade per attaccare un gran numero di altri problemi. Secondo Ken Ribet, la dimostrazione di Wiles rappresenta una sintesi perfetta della matematica moderna e un modello a cui ispirarsi per il futuro: «Penso che se una persona fosse sperduta su un'isola deserta e possedesse soltanto questo

manoscritto, avrebbe un mucchio di nutrimento per la mente. Vedrebbe tutte le idee attuali della teoria dei numeri. Giri una pagina e fa una breve apparizione un certo teorema fondamentale di Deligne, poi giri un'altra pagina e compare incidentalmente un teorema di Hellegouarch; tutte queste cose sono tirate in ballo e utilizzate per un momento prima di passare all'idea successiva».

I giornalisti scientifici cantarono le lodi della dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat, ma pochi di loro fecero commenti sulla dimostrazione della congettura di Taniyama-Shimura, che le era legata in modo inestricabile. Pochi di loro si preoccuparono di citare il contributo di Yutaka Taniyama e di Goro Shimura, i due matematici giapponesi che negli anni Cinquanta avevano posto le basi per il lavoro di Wiles. Anche se Taniyama si era suicidato da oltre trent'anni, il suo collega Shimura era lì a testimoniare la conferma della bontà del loro lavoro. Quando gli si chiede quale sia stata la sua reazione alla dimostrazione, Shimura fa un sorriso gentile e con modi misurati e pieni di dignità dice semplicemente: «Ve l'avevo detto».

Come molti dei suoi colleghi, Ken Ribet ritiene che la dimostrazione della congettura abbia rivoluzionato la matematica: «C'è una ripercussione psicologica importante, cioè il fatto che ora siamo in grado di compiere grandi progressi su altri problemi sui quali prima eravamo troppo timorosi. Il paesaggio è mutato, nel senso che sappiamo che tutte le equazioni ellittiche sono modulari e quindi che quando dimostriamo un teorema per le equazioni ellittiche stiamo anche affrontando le funzioni modulari e viceversa. Hai una prospettiva diversa su quello che accade e ti senti meno intimidito dall'idea di lavorare con le funzioni modulari, dato che in sostanza ora stai lavorando con equazioni ellittiche. E naturalmente, quando scrivi un articolo sulle equazioni ellittiche, invece di dire che non ne sappiamo niente e dunque dobbiamo presupporre la validità della congettura di Ta-niyama-Shimura e vedere cosa ne possiamo ricavare, ora possiamo semplicemente dire: Sappiamo che la congettura di Taniyama-Shimura è vera, perciò la tal cosa deve essere vera. È un'esperienza molto più piacevole».

Unificando i mondi ellittico e modulare con la dimostrazione della congettura di Taniyama-Shimura, Wiles aveva fornito ai matematici le scorciatoie per raggiungere molte altre dimostrazioni: i problemi in un dominio potevano essere risolti per analogia con i problemi nel dominio adiacente. Classici problemi ellittici insoluti che risalivano ancora all'antica Grecia potevano ora essere risolti usando tutti gli strumenti e le tecniche modulari disponibili.

Cosa ancora più importante, Wiles aveva compiuto il primo passo verso il grande progetto di unificazione di Robert Langlands: il programma Langlands. Oggi c'è un rinnovato sforzo di dimostrare altre congetture di unificazione fra aree diverse della matematica. Nel marzo del 1996 Wiles divise i centomila dollari del premio Wolf (da non confondere con il premio Wolfskehl) con Langlands. Il comitato del premio Wolf riconobbe che se la dimostrazione di Wiles era di per sé un'impresa sbalorditiva, essa aveva anche infuso vita all'ambizioso progetto di Langlands. Era una scoperta che avrebbe potuto condurre i matematici nella prossima età dell'oro per la risoluzione di problemi.

Dopo un anno di imbarazzo e incertezza la comunità matematica poteva finalmente gioire. Ogni simposio, seminario o convegno aveva una sessione dedicata alla

dimostrazione di Wiles, e a Boston i matematici promossero una gara di poesia per commemorare lo storico evento:

«Garçon, il mio burro è tutto scritto»,
Protestò un commensale inviperito,
«Spiacente, ma ho dovuto scriver lì»,
Jean-Pierre, il cameriere, interloquì,
«Nella margarina lo spazio era esaurito.»

E. HOWE, H. LENSTRA, D. MOULTON

Il premio

La dimostrazione di Wiles dell'Ultimo Teorema di Fermat si basa sulla verifica di una congettura nata negli anni Cinquanta. L'argomentazione sfrutta una serie di tecniche matematiche elaborate nell'ultimo decennio, alcune delle quali sono state inventate dallo stesso Wiles, La dimostrazione è un capolavoro della matematica moderna, e ciò porta inevitabilmente alla conclusione che la dimostrazione di Wiles non è la stessa di Fermat. Fermat scrisse che la sua dimostrazione non avrebbe potuto essere contenuta nei margini della sua copia dell'Aritmetica di Diofanto, e le duecento pagine di densa matematica di Wiles soddisfano senza dubbio questo criterio, ma è certo che Fermat non ideò le funzioni modulari, la congettura di Taniyama-Shimura, le rappresentazioni di Galois e il metodo di Kolyvagin-Flach secoli prima di chiunque altro.

Se Fermat non aveva in mano la dimostrazione di Wiles, che cosa aveva dunque in mano? I matematici si dividono in due partiti. Gli scettici realisti ritengono che l'Ultimo Teorema di Fermat fu il risultato di un raro momento di debolezza da parte di quel genio del diciassettesimo secolo. Essi sostengono che poche ore (o forse pochi giorni) dopo che aveva scritto di avere scoperto «una meravigliosa dimostrazione», Fermat si rese conto di aver compiuto uno sciocco errore nel suo ragionamento aritmetico mentale. Sull'esatta natura dell'errore nella sua dimostrazione si può discutere, ma è del tutto plausibile che egli avesse seguito la stessa linea di ragionamento di Cauchy e Lamé.

Altri matematici, i romantici ottimisti, ritengono che Fermat potrebbe aver ottenuto una dimostrazione valida. Qualunque possa essere stata quella dimostrazione, doveva comunque basarsi sulla matematica del diciassettesimo secolo, e doveva coinvolgere un ragionamento così ingegnoso che è sfuggito a tutti, da Euler a Wiles. Nonostante la pubblicazione della soluzione del problema da parte di Wiles, ci sono tantissimi matematici che ritengono di poter ancora ottenere fama e gloria scoprendo la dimostrazione originale di Fermat.

Anche se Wiles ha dovuto fare ricorso a metodi del ventesimo secolo per risolvere un enigma del diciassettesimo secolo, egli ha vinto la sfida di Fermat in accordo con le regole stabilite dal comitato Wolfskehl. Il 27 giugno 1996 Andrew Wiles incassò il

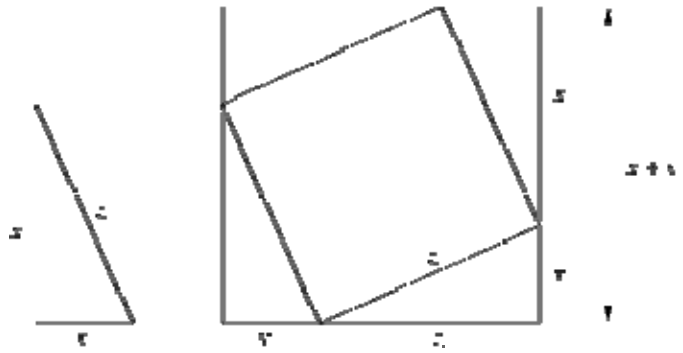
Premio Wolfskehl, il cui valore ammontava a cinquantamila dollari. Una volta ancora Fermat e Wiles finirono sulle prime pagine dei giornali di tutto il mondo. L'Ultimo Teorema di Fermat era stato ufficialmente risolto.

Ma quale sarà la prossima sfida che catturerà l'attenzione di Wiles? Non sorprende che un uomo che ha lavorato in completa segretezza per sette anni si rifiuti di fare commenti sulle sue ricerche attuali, ma qualunque sia l'argomento su cui sta lavorando, non c'è dubbio che esso non sostituirà completamente la sua infatuazione per l'Ultimo Teorema di Fermat. «Non esiste nessun altro problema che potrà significare altrettanto per me. Era la passione della mia infanzia. Non c'è niente che possa sostituirlo. L'ho risolto. Tenterò con altri problemi, ne sono sicuro. Alcuni saranno molto ardui e proverò di nuovo un senso di realizzazione, ma non ci sono altri problemi matematici che possano avvincermi come fece Fermat.

«Ho avuto il raro privilegio di riuscire a realizzare nella mia vita adulta quello che era stato il mio sogno d'infanzia. So che è un privilegio raro, ma se da adulto riesci ad afferrare qualcosa che per te significa così tanto, ciò è più gratificante di ogni altra cosa immaginabile. Dopo aver risolto questo problema avverto sicuramente un senso di perdita, ma allo stesso tempo un tremendo senso di libertà. Ero così ossessionato da questo problema che per otto anni ci ho pensato tutto il tempo, da quando mi svegliavo alla mattina fino a quando andavo a dormire la sera. È un tempo molto lungo per pensare a una sola cosa. Ora quella particolare odissea è terminata. Il mio animo è in pace.»

APPENDICI

APPENDICE 1
LA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI PITAGORA



Scopo della dimostrazione è provare che il teorema di Pitagora è vero per tutti i triangoli rettangoli. Il triangolo sopra mostrato potrebbe essere qualunque triangolo rettangolo perché le sue dimensioni non sono specificate e sono simboleggiate dalle lettere *x, y* e *z*.

Nella figura sopra, quattro triangoli rettangoli identici, combinati con un quadrato disposto obliquamente, formano un grande quadrato. La chiave della dimostrazione è questo grande quadrato.

L'area del grande quadrato può essere calcolata in due modi.

Metodo 1: Misurare l'area del quadrato grande nel suo insieme. La lunghezza di ogni lato è data da $x + y$. Perciò, area del grande quadrato = $(x + y)^2$.

Metodo 2: Misurare l'area di ogni elemento del quadrato grande. L'area di ciascun triangolo è $\frac{1}{2}xy$, cioè $\frac{1}{2}\times$ base $\times$ altezza. L'area del quadrato obliquo è z^2. Pertanto,

area del grande quadrato = 4 × (area del triangolo)+ area del quadrato obliquo

$$= 4(\frac{1}{2}xy) + z^2.$$

I metodi 1 e 2 portano a due espressioni diverse. Tuttavia queste espressioni devono essere equivalenti perché rappresentano la stessa area. Pertanto:

area ottenuta con il metodo 1 = area ottenuta con il metodo 2

$$(x + y)^2 = 4(\frac{1}{2}xy) + z^2.$$

Si possono togliere le parentesi in entrambi i membri delle equazioni, scrivendoli in forma estesa. Dunque,

$$x^2+y^2+2xy=2xy+z^2$$

Il termine $2xy$ può essere cancellato da entrambi i membri. Perciò abbiamo:

$$x^2+y^2=z^2$$

che è il teorema di Pitagora!

La dimostrazione è basata sul fatto che l'area del grande quadrato deve essere la stessa, a prescindere dal metodo che si usa per calcolarla. Perciò deriviamo logicamente due espressioni per la stessa area, le rendiamo equivalenti, e infine scaturisce l'inevitabile conclusione che $x^2 + y^2 = z^2$, ossia il quadrato costruito sull'ipotenusa, $z^{2,}$ è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti, $x^2 + y^2$.

L'aspetto cruciale è che questa dimostrazione è valida per tutti i triangoli rettangoli. I lati del triangolo nella nostra dimostrazione sono rappresentati da *x, y* e *z* e possono dunque rappresentare i lati di un qualsiasi triangolo rettangolo.

APPENDICE 2
LA DIMOSTRAZIONE DI EUCLIDE CHE $\sqrt{2}$ È IRRAZIONALE

Lo scopo di Euclide era dimostrare che $\sqrt{2}$ non poteva essere scritto come una frazione. Dato che egli usò una dimostrazione per assurdo, il primo passo era quello di supporre che fosse vero il contrario, vale a dire che $\sqrt{2}$ potesse essere scritto nella forma di una frazione sconosciuta. Questa ipotetica frazione è rappresentata da *p*⁄*q*, dove *p* e *q* sono due numeri interi.

Prima di imbarcarci nella dimostrazione vera e propria, tutto ciò di cui abbiamo bisogno è la comprensione di alcune proprietà fondamentali delle frazioni e dei numeri pari.

1. Se prendete un qualunque numero e lo moltiplicate per 2, il nuovo numero deve essere pari. Questa è in sostanza la definizione di numero pari.
2. Se sapete che il quadrato di un numero è pari, allora il numero stesso deve essere pari.
3. Infine, le frazioni possono essere semplificate: $\frac{16}{24}$ è equivalente a $\frac{8}{12}$ basta che si dividano il numeratore e il denominatore per il fattore comune 2. Inoltre, $\frac{8}{12}$ equivale a $\frac{4}{6}$, e $\frac{4}{6}$ quivale a $\frac{2}{3}$. Tuttavia $\frac{2}{3}$ non può essere semplificata ulteriormente perché 2 e 3 non hanno alcun fattore comune. È impossibile continuare a semplificare una frazione all'infinito.

Ora, ricordate che secondo Euclide $\sqrt{2}$ non può essere scritta come una frazione. Tuttavia, poiché egli adotta il metodo della dimostrazione per assurdo, il suo ragionamento si basa sul presupposto che la frazione p⁄q esista, per poi esaminare le conseguenze della sua esistenza:

$$\sqrt{2} = p/q$$

Se eleviamo al quadrato ambedue i membri, allora

$$2 = p2/q2$$

Da questa equazione possiamo facilmente ottenere

$$2q2 = p2$$

Ora, dalla proprietà (1) sappiamo che p^2 deve essere pari. Inoltre, dalla proprietà (2) sappiamo che anche p deve essere pari. Ma se p è pari, allora può essere scritto come $2m$, dove m è un altro numero intero. Ciò segue dalla proprietà (1). Sostituiamo $2m$ a p nell'equazione e otteniamo

$$2q^2=(2m)^2=4m^2$$

Dividendo entrambi i termini per 2, l'equazione diventa

$$q^2=2m^2$$

Ma per gli stessi argomenti che abbiamo usato sopra, sappiamo che q^2 deve essere pari, e dunque q stesso deve essere pari. In questo caso q può essere scritto come $2n$, dove n è un numero intero. Se torniamo all'inizio, abbiamo dunque

$$\sqrt{2}=p/q=2m/2n$$

Possiamo semplificare il termine 2m⁄2n dividendo numeratore e denominatore per 2:

$$\sqrt{2}=m/n$$

Adesso abbiamo una frazione m⁄n, che è più semplice di *p⁄q*.

Tuttavia ci troviamo in una posizione tale da poter ripetere esattamente lo stesso procedimento su *m⁄n*, e alla fine otterremo una frazione ancora più semplice, che possiamo scrivere come *g⁄h*. Questa frazione può passare nuovamente attraverso la medesima trafila, e la nuova frazione, chiamiamola *e⁄f*, sarà ancora più semplice. Possiamo ripetere questo processo di continuo, senza mai finire. Ma dalla proprietà (3) sappiamo che le frazioni non possono essere semplificate all'infinito. Deve sempre esserci una frazione che non può essere semplificata ulteriormente, ma la nostra ipotetica frazione di partenza *p⁄q* non sembra obbedire a questa regola. Pertanto è lecito dire che siamo giunti a una contraddizione. Se $\sqrt{2}$ potesse essere scritta come una frazione, le conseguenze sarebbero assurde, e dunque l'affermazione secondo cui non può essere scritta come frazione è vera. Pertanto $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale.

APPENDICE 3.
L'ENIGMA DELL'ETÀ DI DIOFANTO

Chiamiamo L la durata della vita di Diofanto. L'enigma ci fornisce un resoconto completo della sua vita, che è il seguente:

> La sua infanzia durò 1/6 della sua vita, cioè $L/6$,
> $L/12$ fu il tempo della sua adolescenza,
> poi, prima del matrimonio passò un tempo pari a $L/7$,
> 5 anni più tardi gli nacque un figlio,
> $L/2$ durò la vita del figlio,
> e prima di morire Diofanto visse altri 4 anni.

La durata della vita di Diofanto è data dalla somma di queste quantità:

$$L=\frac{L}{6}+\frac{L}{12}+\frac{L}{7}+5+\frac{L}{2}+4$$

Possiamo poi semplificare l'equazione come segue:

$$L=\frac{25}{28}L+9,$$

$$\frac{3}{28}L=9,$$

$$L=\frac{28}{3}\times 9=84$$

Diofanto morì all'età di 84 anni.

APPENDICE 4.
IL PROBLEMA DEI PESI DI BACHET

Per poter pesare un qualsiasi numero intero di chilogrammi da 1 a 40, la maggior parte delle persone suggerirà che ci sia bisogno di sei pesi: 1, 2, 4, 8, 16, 32 kg. In questo modo è facile raggiungere un qualsiasi peso sistemando su un piatto della bilancia le seguenti combinazioni:

$$
\begin{aligned}
&1 \text{ kg} = 1,\\
&2 \text{ kg} = 2,\\
&3 \text{ kg} = 2 + 1,\\
&4 \text{ kg} = 4,\\
&5 \text{ kg} = 4 + 1,\\
&\ldots\\
&40 \text{ kg} = 32 + 8.
\end{aligned}
$$

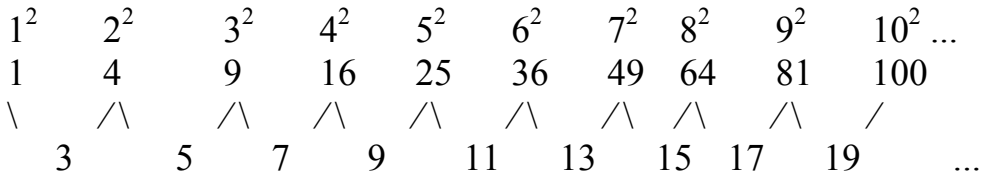
Tuttavia, sistemando i pesi in entrambi i piatti, in modo tale che sia possibile porne alcuni accanto all'oggetto che si deve pesare, Bachet era in grado di portare a termine il compito con quattro pesi soltanto: 1, 3, 9, 27 kg. Infatti un peso posto nello stesso piatto in cui si trova l'oggetto da pesare assume in effetti un valore negativo. Pertanto ogni numero intero di chilogrammi da 1 a 40 può essere ottenuto come segue:

$$
\begin{aligned}
&1 \text{ kg} = 1,\\
&2 \text{ kg} = 3 - 1,\\
&3 \text{ kg} = 3,\\
&4 \text{ kg} = 3 + 1,\\
&5 \text{ kg} = 9 - 3 - 1,\\
&\ldots\\
&40 \text{ kg} = 27 + 9 + 3 + 1.
\end{aligned}
$$

APPENDICE 5.
LA DIMOSTRAZIONE DI EUCLIDE DELL'ESISTENZA DI UN NUMERO INFINITO DI TERNE PITAGORICHE.

Una terna pitagorica è un insieme di tre numeri interi tali che la somma del quadrato di due numeri è uguale al quadrato del terzo numero. Euclide riuscì a dimostrare che esiste un numero infinito di terne pitagoriche.

La dimostrazione di Euclide inizia con l'osservazione che la differenza fra due quadrati consecutivi è sempre un numero dispari:



Ognuno degli infiniti numeri dispari può essere sommato a un particolare quadrato per ottenere il quadrato di un altro numero. Una frazione di questi numeri dispari è costituito a sua volta da quadrati, ma una frazione dell'infinito è anch'essa infinita.

Pertanto esiste anche un'infinità di quadrati dispari che possono essere aggiunti a un quadrato per ottenere il quadrato di un altro numero. In altre parole, deve esistere un numero infinito di terne pitagoriche.

APPENDICE 6.
UN ESEMPIO DI COME SI POSSA FINIRE NELL'ASSURDO

Quella che segue è una classica dimostrazione di come sia facile partire da un'asserzione molto semplice e giungere, attraverso pochi passaggi in apparenza chiari e logici, a dimostrare che *2 = 1*.

Cominciamo, per prima cosa, dall'innocua asserzione

$$a=b$$

Quindi moltiplichiamo i due membri per *a*:

$$a^2=ab$$

Aggiungiamo poi a^2 - *2ab* ai due membri dell'equazione:

$$a^2 + a^2 - 2ab = ab + a^2 - 2ab$$

che possiamo semplificare come segue:

$$2(a^2 - ab) = a^2 - ab$$

Dividiamo infine i due membri per $a^2 - ab$ e otteniamo

$$2 = 1.$$

L'asserzione da cui siamo partiti sembra essere, ed è, assolutamente innocua; eppure in uno dei passaggi usati per trasformare l'equazione è stato commesso un errore sottile ma disastroso che ci ha portato alla contraddizione finale.

In effetti l'errore fatale compare nell'ultimo passaggio, in cui abbiamo diviso entrambi i membri dell'equazione per $a^2 - ab$. Sappiamo infatti dall'enunciato di partenza che $a = b$, e pertanto la divisione per $a^2 - ab$ equivale a una divisione per zero.

La divisione per zero è un passaggio rischioso perché zero sta in una qualsiasi quantità finita un numero infinito di volte. Creando l'infinito in entrambi i membri abbiamo in effetti privato di valore l'uguaglianza e permesso che una contraddizione si insinuasse nel ragionamento.

Questo errore è un esempio tipico del genere di svarioni in cui caddero molti concorrenti al Premio Wolfskehl.

APPENDICE 7.
GLI ASSIOMI DELL'ARITMETICA

Gli assiomi seguenti sono tutto ciò di cui si ha bisogno come base di partenza per costruire la complessa struttura dell'aritmetica:

1. Per ogni due numeri *m,n*

   $$m + n = n + m \text{ e } mn = nm.$$

2. Per ogni tre numeri *m,n,k*

   $$(m + n) + k = m + (n + k) \text{ e } (mn)k - m(nk).$$

3. Per ogni tre numeri *m,n,k*

   $$m(n + k) = mn + mk.$$

4. Esiste un numero 0 tale che, per ogni numero *n*,

   $$n + 0 = n.$$

5. Esiste un numero *1* tale che, per ogni numero *n*,

   $$n \times 1 = n.$$

6. Per ogni numero *n* esiste un altro numero *k* tale che

   $$n + k = 0.$$

7. Per ogni tre numeri *m,n,k*

   se $k \neq 0$ e $kn = km$, allora $m = n$.

A partire da questi assiomi è possibile dimostrare altre proprietà. Ad esempio, tramite l'applicazione rigorosa degli assiomi e senza presupporre nient'altro, possiamo dimostrare la seguente proprietà in apparenza ovvia:

se $m + k = n + k$, allora $m = n$.

Per cominciare stabiliamo che

$$m+k=n+k$$

Per l'assioma 6 sappiamo che esiste un numero *l* tale che $k + l = 0$; aggiungendo *l* ai due membri abbiamo

$$(m+k)+l=(n+k)+l$$

Ma, per l'assioma 2,

$$m+(k+l)=n+(k+l)$$

Poiché $k + l = 0$, sappiamo però che

$$m+0=n+0$$

Applicando l'assioma 4, possiamo infine affermare ciò che volevamo dimostrare:

$$m=n$$

APPENDICE 8.
LA TEORIA DEI GIOCHI E IL DUELLO A TRE

Esaminiamo le opzioni del signor Neri. Il signor Neri potrebbe sparare il primo colpo al signor Rossi. Se lo colpirà, lo sparo successivo spetterà al Signor Bianchi. Al signor Bianchi resta un solo avversario, il signor Neri, e poiché il signor Bianchi non sbaglia mai, il signor Neri è un uomo morto.

Per il signor Neri un'opzione migliore è quella di sparare al signor Bianchi. Se lo colpirà, lo sparo successivo spetterà al signor Rossi. Il signor Rossi colpisce il bersaglio solo due volte su tre e dunque c'è la possibilità che il signor Neri sopravviva. A questo punto il signor Neri sparerà al signor Rossi e avrà la possibilità di vincere il duello a tre.

Sembrerebbe dunque che il signor Neri debba adottare la seconda strategia. Esiste tuttavia una terza opzione che è migliore. Il signor Neri potrebbe sparare in aria. Al signor Rossi spetta il secondo colpo ed egli sparerà al signor Bianchi, dato che è il suo avversario più pericoloso. Se il signor Bianchi sopravvive sparerà al signor Rossi, che è il suo avversario più pericoloso. Sparando in aria, il signor Neri dà al signor Rossi l'opportunità di eliminare il signor Bianchi o viceversa.

Questa è la miglior strategia che il signor Neri possa adottare. Alla fine o morirà il signor Bianchi oppure morirà il signor Rossi, e allora il signor Neri potrà sparare all'avversario sopravvissuto. Il signor Neri ha manipolato la situazione in modo tale che, invece di avere il primo colpo in un duello a tre, ha il primo colpo in un normale duello uno contro uno.

APPENDICE 9.
UN ESEMPIO DI DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE

Per i matematici è utile avere a disposizione semplici formule che forniscano la somma di varie sequenze di numeri. In questo caso il problema è trovare una formula che dia la somma dei primi *n* numeri naturali.

Indicheremo la somma dei primi *n* numeri naturali con il simbolo S(*n*). Per esempio, la somma del solo primo numero naturale sarà S(1) = 1; la somma dei primi due numeri sarà *S(2) = 1 + 2 = 3*; la somma dei primi tre numeri sarà *S(3) = 1 + 2 + 3 = 6;* la somma dei primi quattro numeri sarà *S(4) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10* e così via.

Una formula che sembra candidata a descrivere questo andamento è:

$$S(n) = \frac{1}{2} n(n+1)$$

In altre parole, se vogliamo trovare la somma dei primi *n* numeri naturali, basta che inseriamo il numero in questa formula e calcoliamo il risultato.

La dimostrazione per induzione permette di dimostrare che questa formula è valida per qualsiasi numero naturale fino all'infinito.

Il primo passo consiste nel dimostrare che la formula è valida per il primo caso, $n = 1$. Ciò è decisamente semplice, poiché sappiamo che la somma del solo primo numero naturale è 1, e se poniamo *n* = 1 nella formula candidata otteniamo il risultato corretto:

$$S(n) = \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$S(1) = \frac{1}{2} \times 1 \times (1+1)$$

$$S(1) = \frac{1}{2} \times 1 \times 2$$

$$S(n) = 1$$

La prima tessera di domino è stata fatta cadere.

Il passo successivo della dimostrazione per induzione consiste nel dimostrare che se la formula è vera per un valore *n* qualsiasi, allora deve essere vera per *(n + 1)*. Se

$$S(n) = \frac{1}{2} n(n+1)$$

allora

$$S(n+1) = S(n) + (n+1)$$

ovvero

$$S(n+1) = \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1)$$

Sviluppando e raggruppando i termini a destra dell'uguaglianza, otteniamo

$$S(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)[(n+1)+1]$$

La cosa fondamentale da notare è che questa nuova equazione è identica all'equazione originale tranne che per il fatto che n è stato sostituito da $(n + 1)$.

In altre parole, se la formula è vera per n, allora deve essere vera anche per $(n + 1)$. Se una tessera di domino cade, butterà sempre giù la successiva. La dimostrazione per induzione è completa.

SUGGERIMENTI PER ULTERIORI LETTURE

Nel compiere le ricerche per L'Ultimo Teorema di Fermat mi sono basato su numerosi libri e articoli. Oltre alle fonti principali che ho consultato per ogni capitolo, ho elencato anche altro materiale che potrebbe interessare sia il lettore profano sia gli esperti nel campo. Laddove il titolo della fonte non indichi quale sia la sua rilevanza ho aggiunto una frase o due per descriverne il contenuto.

1. «Penso di fermarmi qui»

The Last Problem di Eric T. Bell, Mathematical Association of America, 1990. Un popolare resoconto delle origini dell'Ultimo Teorema di Fermat.

Pythagoras - A Short Account of His Life and Phylosophy di Leslie Ralph, Krikos, 1961.

Pythagoras - A Life di Peter Gorman, Routledge and Kegan Paul, 1979.

A History ofGreek Mathematics voll. 1-2, di Sir Thomas Heath, Dover, 1981.

Show di magia matematica di Martin Gardner, Zanichelli, Bologna 1980. Una raccolta di rompicapi ed enigmi matematici.

«River meandering as a self-organization process» di Hans-Henrik Stllum, Science, *n*. 271 (1996), pp. 1710-1713.

2. Il creatore di enigmi

The mathematical Career of Pierre de Fermat di Michael Mahoney, Princeton University Press, 1994. Un'indagine dettagliata della vita e dell'opera di Fermat.

La vendetta di Archimede. Gioie e insidie della matematica di Paul Hoffman, Bompiani, Milano 1990. Storie affascinanti sulla matematica.

3. Una sciagura matematica

I grandi matematici di Eric T. Bell, Sansoni, Firenze 1950. Le biografie dei più grandi matematici della storia, compresi Euler, Fermat, Gauss, Cauchy e Kummer.

«The periodical cicada problem» di Monte Lloyd e Henry S. Dybas, Evolution, *n*. 20 (1966), pp. 466-505.

Women in Mathematics di Lynn M. Osen, MIT Press, 1994. Un testo per lo più non matematico che contiene le biografie di molte delle donne che hanno fatto la storia della matematica, compresa Sophie Germain.

Math Equals: Biographies of Women Mathematicians + Related Activities di Teri Perl, Addison-Wesley, 1978.
Women in Science di H. J. Mozans, D. Appleton and Co., 1913.
«Sophie Germain» di Dahan Dalmédico, Le Scienze, *n*. 282, febbraio 1992. Un breve articolo che racconta la vita e le opere di Sophie Germain.
Fermat's Last Theorem - A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory di Harold M. Edwards, Springer, 1977. Una discussione matematica dell'Ultimo Teorema di Fermat, con la trattazione dettagliata di alcuni dei primi tentativi di dimostrazione.
Elementary Number Theory di David Burton, Allyn Bacon, 1980.
Varie comunicazioni di A. Cauchy, C. R. Acad. Sci. Paris, *n*. 24 (1847), pp. 407-416, 469-483.
«Note au sujet de la demonstration du théorème de Fermat» di G. Lamé, C. R. Acad. Sci. Paris, *n*. 24 (1847), p. 352.
«Extrait d'une lettre de M. Kummer à M. Liouville» di E. E. Kummer, J. Math. Pures et Appl., *n*. 12 (1847), p. 136. Ristampato in Collected Papers, voi. 1, a cura di A. Weil, Springer, 1975.
A Number for Your Thoughts di Malcom E. Lines, Adam Hilger, 1986. Fatti e ipotesi sui numeri da Euclide ai più recenti computer, fra cui una descrizione un po' più dettagliata della congettura dei punti.

4. Dentro l'astrazione

3.1416 and All That di P. J. Davis e W. G. Chinn, Birkhauser, 1985. Una serie di storie sui matematici e la matematica, con un capitolo dedicato a Paul Wolfskehl.
The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers di David Wells, Penguin 1986.
The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Puzzles di David Wells, Penguin 1992.
Sam Loyd and bis Puzzles di Sam Loyd (II), Barse and Co., 1928.
Mathematical Puzzles of Sam Loyd di Sam Loyd, a cura di Martin Gardner, Dover, 1959.
Riddles in Mathematics di Eugene P. Northropp, Van Nostrand, 1944.
13 Lectures on Fermat's Last Theorem di Paulo Ribenboim, Springer, 1980. Un resoconto dell'Ultimo Teorema di Fermat, scritto prima del lavoro di Andrew Wiles; è un testo di livello universitario avanzato.
Mathematics: The Science of Patterns di Keith Devlin, Scientific American Library, 1994. Un libro magnificamente illustrato che comunica i concetti della matematica attraverso immagini straordinarie.
Dove va la matematica di Keith Devlin, Bollati Boringhieri, Torino 1994. Un compendio comprensibile e dettagliato della matematica moderna, con una discussione degli assiomi della matematica.
The Concepts of Modern Mathematics di Ian Stewart, Penguin, 1995.

«Kurt Gödel» di G. Kreisel, Biographical Memoirs of the Fellows ofthe Royal Society, 1980.

Apologia di un matematico di Godfrey H. Hardy, Garzanti, Milano 1989. Una delle grandi figure della matematica del ventesimo secolo fa un resoconto personale di ciò che dà le motivazioni a lui e ad altri matematici. [Per le citazioni tratte dal libro di Hardy ci si è basati sulla traduzione italiana di Luisa Saraval(N.d.T.)]

Alan Turing: The Enigma of Intelligence di Andrew Hodges, Unwin Paperbacks, 1983. Un resoconto della vita di Alan Turing, compreso il suo contributo alla decifrazione del codice Enigma.

5. Dimostrazione per assurdo

«Yutaka Taniyama and his time» di Goro Shimura, Bulletin of the London Mathematical Society, *n*. 21 (1989), pp. 186-196. Un resoconto assai personale della vita e dell'opera di Yutaka Taniyama.

«Links between stable elliptic curves and certain diophantine equations» di Gerhard Frey, Ann. Univ. Sarav. Math. Ser., *n*. 1 (1986), pp. 1-40. Il saggio fondamentale che suggerì un nesso fra la congettura di Taniyama-Shimura e l'Ultimo Teorema di Fermat.

6. Il calcolo segreto

«Genius and Biographers: The Fictionalization of Evariste Galois» di T. Rothman, Amer. Math. Monthly, *n*. 89 (1982), pp. 84-106. Contiene un elenco dettagliato delle fonti storiche che stanno alla base delle biografie di Galois, e discute la validità delle varie interpretazioni.

«La vie d'Evariste Galois» di Paul Depuy, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, *n*. 13 (1896), pp. 197-266.

Mes Memoirs di Alexandre Dumas, Editions Gallimard, 1967.

Notes on fermat's Last Theorem di Alf van der Poorten, Wiley, 1996. Una descrizione tecnica della dimostrazione di Wiles destinata agli studenti universitari in matematica e oltre.

7. Un piccolo problema

«An elementary introduction to the Langlands programme» di Stephen Gelbart, Bulletin of the American Mathematical Society, *n*. 10 (1984), pp. 177-219. Una spiegazione tecnica del programma Langlands destinata ai ricercatori in matematica.

«Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem» di Andrew Wiles, Annals of Mathematics, *n*. 142 (1995), pp. 443-551. Questo saggio include la gran parte della dimostrazione di Wiles della congettura di Taniyama-Shimura e dell'Ultimo Teorema di Fermat.

«Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras» di Richard Taylor e Andrew Wiles, Annals of Mathematics, *n*. 142 (1995), pp. 553-572. Questo saggio descrive la matematica che fu usata per superare gli errori nella dimostrazione di Wiles del 1993.